A.5) "Truth and Necessity in Mathematics," by Hilary Putnam, translated by Hossein Ziai. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society (BIMS)*, no. 9 (Winter, 1979), pp. 135-151.

حقیقت وضرورت درریاضیات، نوشتهٔ **هیلاری پاتنم** برای باراول درکتاب

MATHEMATICS MATTER AND METHOD (VOL.I).

By H. Putnam. Cambridge, 1975.

بچاپ رسید ،وترجمه فارسی آن نخست بار، دربولتن **انجمن ریاضی ایران** (شماره ۹ ،بهار۱۳۵۷) وهم اینک درمجموعهٔ حاضر، چاپ ونشرشده است .

پاتنم دراین مقاله بانهاده منطق گرائی وبطور کلی بانظریه تجربه‌گرائی منطقی **کارناپ** مخالفت میکند .دیدگاه اورا در ذیل خلاصه میکنیم :

۱ـ واقع گرایی درموردا‌شیاء عینی ، درموردکلیاتی مانند اندازه‌های فیزیکی ومیدان‌ها ،درموردضرورت ریاضی ، نیزدرموردامکان‌ریاضی ،

۲ـ نفی ماتقدم بودن مطلق مفاهیم اصلی ریاضی وفلسفه ،

۳ـ نفی نهاده تجربه گرائی منطقی ،یعنی که پاتنم قبول نمی کندکه تمام گزاره‌هائی‌که دردنیای خارج مصداق دارند ،همه، ودرهمه وقت ، تجربی هستندومیتوان آنهاراازطریق تجربهٔ صرف سنجید ،

۴ـ کوشش درراه تشخیص قسمت تجربی وقسمت غیرتجربی ریاضیات وتعیین وجه تمایزآنها ،هم به دلائل تاریخی و هم ازدیدگاه روش شناسی .

نویسنده : **هیلری پاتنم**
مترجم : **حسین ضیائی**

حقیقت وضرورت در ریاضیات

امیدوارم کسی فکرنکندکه بین فلسفهٔ علوم صوری و علوم تجربی هیچ رابطه‌ای وجودندارد. فلسفه‌ای که در سی سال اخیر برعلوم تجربی تاثیر زیادی گذاشته، یعنی **تجربه گرایی منطقی کارناپ** ومکتب او ، برمبنای دواصل استوار است :

۱ـ مسائل سنتی فلسفه، مسائلی مجازی وسراپا عاری ازمعناهستند.

۲ـ قضایای علوم صوری ـ یعنی منطق و ریاضیات ـ تحلیلی هستند. البته نه تحلیلی به اصطلاح **کانت** ، بل به این معنی که **چیزی نمی گویند** وتنها گویای قوانین زبان شناسی ماهستند.

امروزه، فلاسفهٔ تحلیلی شروع به سازمان بخشیدن به فلسفهٔ علوم جدید کرده‌اند، فلسفه‌ای که هرچند می خواهد غیرمابعدالطبیعی باشد، لکن نمی‌تواند اصول اصلی **تجربه گرایی منطقی** را بپذیرد. بنابراین برخورد با مفهوم مثبت گرایی در ریاضیات تنها یک مساله فنی نیست، بلکه برای تمامیت مفهوم

فلسفهٔ علوم نیز دارای اهمیت می باشـــــــــد .

چه چیزی احکامی را که به سبب داشتن دلائل ریاضی معتبرند، یا احکامی را که اثبات نادرستی آنها از جنبهٔ ریاضی ممتنع است (خواه در زبان ریاضیات محض، خواه در زبان دیگر) یا احکامی را که از جنبهٔ ریاضی ضروری هستند، از دیگر حقایق متمایز می‌کند ؟ بر خلاف آنچه تاکنون عرضه شده‌است، استدلالی را پیشنهاد می‌کنیم که براساس آن جواب نه هستی شناسی است، نه لغت، و نه دقیقا" هیچ چیز دیگر که مربوط به زبان شناسی باشد . روش ما در ارائه این استدلال چنین نخواهد بود که نظریهٔ مخالفی را مطرح کنیم، بلکه در این راه، اشاره به واقعیتهایی خواهیم داشت که توجیهات وابسته به هستی شناسی و زبان شناسی نسبت به آنها نارسا هستند . در ضمن امیدواریم اشاره‌ای داشته باشیم به این که چقدر حقایق ریاضی پیچیده‌اند، برخلاف کلیشه‌هایی که کرارا" فلاسفه و ریاضی دانها درمورد موضوع و مشغلهٔ خودشان ساخته و بکار برده‌اند . این عقیده که معرفت وجود (یعنی حوزهٔ متغیرهای پابند) در یک حکم صحیح ریاضی عبارت باشد از حوزهٔ مجموعه‌ها یا اعداد یا توابع یا دیگر *اشیاء ریاضی* ، و اینکه دقیقا" این خصوصیت خود چنان باشد که ریاضیات را از دیگر علوم متمایز سازد، نظری است گسترده . از این دیدگاه ریاضیات برمبنای *اشیاء* (موضوع های) مورد بررسی خود از دیگر علوم متمایز است ، همچنان که گیاه‌شناسی برمبنای اشیاء (موضوع‌های) مـورد تحقیقش اززیست شناسی دریایی جداست . این نظریه زمانی طولانی با نظریهٔ دیگری که از زمـــــان فرگه و *راسل* در میان گذارده شده‌بود، و وجه تمایز دقیق بین ریاضیات و منطق را نفی می‌کرد، در کشمکش بود .ولی منطق، چنان که هست، سروکاری با هستی شناسی ندارد ! صفت ممیزهٔ منطق و اصول و قوانین استلزام منطقی دقیقا" چنین است که هر قلمرویی از اشیاء را به طور دلخواه می‌توان انتخاب کرد و هرگونه لفظی را برای حروف و الفاظ حمل شده و حروف جمله‌ای حاوی در آن حوزه به عنوان مصداقی مشخص وضع نمود . (دراینجا نظریهٔ مجموعه‌ها و مرتبهٔ بالاتر نظریهٔ تسویر را داخل در منطق نمی‌شماریم) . بنابراین در بدو امر مشکلاتی درمورد یک یا هر دو نظریهٔ یاد شده وجود دارد .

درواقع یافتن احکام صحیح ریاضی که درحوزهٔ اشیاء مادی مسورمی‌شونـــد ، یا در حوزهٔ محسوسات ، یا در روزهای هفته، و یا در حوزهٔ هرگونه اشیاء مورد نظر، چندان دشوار نیست . نمونه : احکام صحیح ریاضی دربارهٔ ماشین‌های‌تورینگ ،

درباره‌ٔ نوشتارها، درباره‌ٔ نقشه‌ها، و غیره. بنابراین T را علامت معرف یک ماشین تورینگ معین، و $P_1, P_2, \ldots P_n$ را به عنوان محمولات در زبان ساده زبان شیء، که‌احوال و صفات آن ماشین راوصف می‌کنند، تعیین می‌کنیم (مثلا" P_1 می‌تواند: چرخ دندانه‌دار G_1 که از T به میله‌ٔ T_4 فشار می‌دهد، باشد و از این قبیل). یک دستور منفصل می‌تواند چنین باشد: " اگر $P_2(1)$ و T حرف "Y" راقطع کند، T حرف Y را پاک نموده و به جای آن Z را چاپ خواهدکرد، یک مربع روی نوار به سمت چپ حرکت خواهد کرد (نوار بیشتری اضافه خواهد شد، هرآینه T به آخر برسد)، و در آن موقع دوباره مرتب شده به حال $P_6(T)$ درخواهد آمد ". چنین دستوری‌تماما" داخل در زبانی نام گرای (که درموزه‌ٔ موجودات مجرد مسورنمی‌شوند) می باشد. T کلا" ازطریق مجموعه‌ٔ محدود چنین دستوراتی، $I_1, I_2, \ldots\ldots\ldots I_k$ مشخص‌می‌شود. و دراین صورت حکم:

الف ــ هرگاه I_1 و I_2 و ... و I_k، پس T متوقف نخواهدشد.

می‌تواند یک حکم صحیح ریاضی باشد و تنها در حوزه‌ٔ اشیاء مادی مسور شود. دوباره فرض‌کنیم که ما علائم $I, II, III, \ldots$ را به جای اعدادیک، دو، سه به کار ببریم (یعنی‌نام‌عدد n، رشته‌ای n- تایی از "I" است). دراین علامت نویسی حاصل جمع دو عدد تنها ازطریق شمارش I ها به دست می‌آمد: mn همواره حاصل جمع m و n است. بگذارید $x{=}y^*$ رابه معنای" x مساوی y به توان سه " و N_x را به معنای " x عدد است " و ! (بخوانید: " فریاد") را به معنای " پوچ " بنویسیم. دستگاه حاصله یک دستگاه صوری نسبتا" ابتدایی است که اصول متعارف آن دراین تعبیرهستند:

دستگاه E. S.

الفبا: $N, !, *, =, ., I,$

اصول متعارف :

$$N_1$$

$$N_x \longrightarrow N_{xI}$$

$$N_x \longrightarrow x = x$$

$$N_x \longrightarrow x = x$$

$$x.y = z \longrightarrow x.yI = zx$$

$$x.x = y,\ x.y = z \longrightarrow z = x^*$$

$$z_1 = x_1^*,\ z_2 = x_2^*,\ z_3 = x_3^*,\ z_1 = z_2 z_3 \longrightarrow !$$

به سادگی می توان دریافت که " ! " گزاره‌ای است در E.S. تنها به این شرط که مکعبی مجموعهٔ دومکعب دیگر باشد. و فرما ثابت کرد که این امری است محال. پس آنچه درزیر می آید صحیح است :

ب ــ اگر x دنبالهٔ محدودی از نوشتارها درالفبای $N, !, *, =, ., I,$ باشد، وهرعضو x یا نوشتاری از N_I و یا یک حالت تعویض از یکی از اصول متعارف بالا باشد، یا ازطریق انفصال یکی از دواصطلاح پیشین در دنباله، باشد، بنابراین آن x حاوی " ! " نخواهد بود.

اکنون اگر دنبالهٔ محدود نوشتارهای $I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots, I_n$ خودش مثلاً برابر با نوشتارهای $I_1 \# I_2 \ldots \# I_n$ باشدو # نیز علامتی بیرون از الفبای $N, !, *, =, ., I,$ به عنوان فاصله " ـــ " باشد، (ومی گوئیم که چنین نوشتاری نوشتار I رادرالفبای $., =, *, !$ به عنوان یک عضو درخو د دارد، یا حاوی I است، همانطوری که دنباله با #I شروع می شود ویابا #I ختم می‌شود، یاجزء حقیقی #I# را داراست) . بنابراین حکم ب یک بار دیگر، مثالی است از یک حکم صحیح ریاضی که تنها به اشیاء مادی (دراین جا :نوشتارها) مربوط می‌شود وچنین مثالی رابه سادگی می‌توان ادامه‌داد. پس مشاهده‌می کنیم باوجودی که هیچ کس تا به حال موفق نشده‌است تمام ریاضیات رادریک زبان نام‌گرای

بیان کند ، مشکل برای بیان **قسمتی** (و قسمت با اهمیتی) از ریاضیات به زبــــــان نام گرای وجود ندارد .

اجازه دهید اکنون به پیروی‌از روش فیلسوفان اعتراضی را به آنچه گفتیم مطرح کنیم .

اعتراض این است که اگر چه بعضی احکام صحیح ریاضی تنها در حوزهٔ اشیاء مادی مسورمی‌شود ، ولی به هرحال اثبات این گونه احکام برمبنای اعداد ، و بنابرآن برمبنای ***اشیاء ریاضی*** ، خواهدبود . جواب به اعتراض این است که درقیاس مذکور مقدمه نادرست است ! به عنوان مثال ، اصلی راکه برای اثبات حکم ب در بالا برگزیدیم ، اصل استقراء ریاضی است . و این اصل می‌تواند برای نوشتارهای محدود مستقیما" بیان‌شود ، همچنین می‌توان تصورکرد که برحسب ظاهر ، این اصل ، هرآینه بیان شود ، صحیح است . این چنین نیست که ناگزیر باید اول اصلی برای اعداد بیان کنیم‌و سپس آن اصل را برای نوشتارها از طریق **عدد گزاری گدلی** استنتاج کنیم . (به راستی این چنین کاری منوط و مشروط به دارا بودن یک عدد **گدلــــی** برای هر نوشتار خواهدبود ، که آن‌هم ، بدون فرض خود اصل درمورد نوشتارها ، قابل اثبات نخواهدبود) . بلکه می توان دید که ، برحسب ظاهر ، خود اصل برای نوشتارهای دلخواه صحیح است ، همان طوری که حدسا" می‌توانیم مشاهده کنیم که اصل استقراء در فرضیهٔ اعداد صحیح‌است .
خوداصل ، به عنوان یک ضابطهٔ اثبات ، چنین است :

$$
\begin{array}{l}
P(I) \\
P(.) \\
P(=) \\
P(*) \\
P(!) \\
P(N) \\
P(x) \longrightarrow P(xI) \\
P(x) \longrightarrow P(x.) \\
\quad \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

$$\frac{P(x) \longrightarrow P(xN)}{P(x)}$$

.(درعبارت این اصل چنین خواهدبود :اگـر I , . , = , * , ! , N همـــه P هستند ، واگر ، برای هر x ای ، اگر P(x) پس P(xI), P(x.), .. P(XN) پس بنابراین برای هر x, P(x) .)

چنین می‌نماید که (مطابق مدعای ما) بر روی کاغذ آوردن مجموعه‌ای از اصول متعارف برای نوشتارهای محدودآسان است (سوای هراصل متعارفی دربی نهایت چون که ما تنها خواهان اثبات احکام کلی هستیم ، و بسیاری ازاین احکام کلی مستلزم فرض وجود نوشتارها ، دراثبات مربوطه ، نیستند) .و از این مجموعه از طریق ضابطهٔ استقراء یاد شده و منطق مرتبهٔ یک می توانیم حکم ب و بسیاری احکام مشابه دیگر را اثبات کنیم . بعلاوه ، اگر تنها به فرض کردن ضابطهٔ استقراء اکتفا نکنیم ، و بخواهیم آن را استنتاج کنیم ، چنین کاری رانیز می‌توانیم انجام دهیم .کافی است حساب مفردات (اجزاء وکل‌ها) **گودمن** رابه جای نظریه مجموعه‌ها (یا مرتبهٔ بالای فرضیه تسویر) فرض کنیم ، و چنین کاری را **فرگـــه** و **راسل** کردند . در این صورت اعتراض مذکور رد خواهد شد . و نتیجه می گیریم که ارجاع به موجودات مجرد شامل در ذات ریاضی نیست ، ولو که آن ذوات هرچه می‌خواهندباشند . درحقیقت حتی می توان فرهنگی رادر تصو ر آورد که درآن فرهنگ این قسمت از ریاضیـــــات اجزاء ، کل‌ها ، نوشتارهای مندرج در الفبای محدود ، وغیره- به درجه‌ای از تکامل رسیده باشند ، بدون اینکه کسی ، حتی ، اسمی از **موجودات مجرد** برده‌باشد . به نظر می‌رسد چیزی که ریاضیات را ممتاز و مشخص می‌کند ، شیوهٔ استدلال خاصی است ، ولی چنین شیوهٔ استدلالی ذاتا" باهستی شناسی مرتبط نیست .

مثالهای‌مذکور نشان میدهند که هر آنچه احکام ریاضی صحیح را از احکام دیگر ممتایز می‌کند ، لغت نیست . آیا وجه تمایز *زبانـــــی* است ؟
حکم زیر را ملاحظه کند :

پ ــ هیچ کس نخواهد توانست نقشه‌ای (مسطح) ترسیم کند که احتیاج به پنج رنگ یا بیشتر برای رنگ آمیزی آن داشته باشد . (محدودیت قابل درک از این بیان این است که هیچ دو منطقهٔ مجاوری را نمی توان با یک رنگ نقاشی کــرد .) .

آیا از طریق قوانین زبان (قوانین عقلائی زبان) می توان دربارهٔ صحت حکم پ به خاطر دلایل ریاضی و نه دلایل تجربی، تصمیم گرفت ؟ اگر قوانین زبان را دستگاه مولد دستوری ، مثل دستگاههایی که **نوم چامسکی** و پیروانش ساخته‌اند ، و یا حتی ***انتظام حالت*** **پل زیف** و **قواعد لغوی کاتز** و **فودر** بگیریم ، درآنصورت پاسخ‌ها صریحا" منفی خواهد بود . بعضی از فلاسفه چنان می‌نویسند که گویی علاوه بر قوانین و ضابطه‌های روزانهٔ زبان ، که قابل کشف شدن توسط تحقیقات زبان شناسی (توسط محققین ماهر) می باشند ، ضوابط عمیق دیگری وجود دارند که تنها توسط فلاسفه قابل دریافت هستند ، انگار که فقط ضوابطی از این دسته هستند که به طریق عجیبی حقیقت ریاضی را بیان می‌کنند . هرچند که این طرز تفکر امروزه متداول باشد ، ما گمان می کنیم که این تنها یک بینش مهم است و بس . اما بدون اینکه دراینجا وارد به بحث دربارهٔ شیوهٔ تحلیل دستوری عمیق دربارهٔ حقیقت ریاضی بشویم ، هنوز می‌خواهیم نکته‌ای را مطرح کنیم :
چنانچه با استفاده از قوانین زبان بتوان تصمیم گرفت که آیا حکم پ حکم ریاضی یا حکم تجربی صحیح (و یا غلطی) است ، باید توسط همان قوانین زبان بتوان به این سوال ریاضی نیز پاسخ گفت : " آیا هر نقشه رامی‌توان با چهار رنگ نقاشـــی کـرد ؟ " . چون ، اگر فرض کنیم که حکم پ حقیقت ریاضی دارد ، (یعنی درست است) ، و چون محال است آنچه را که بیان می کند بتوان انجام داد (*محال* در مفهوم ریاضی آن) ، در آن صورت حکم پ حکمی است همانند با :

هیچ کس نمی تواند مکعبی را که مجموعهٔ دو مکعب دیگر باشد نشان دهد .

در این مورد پاسخ مسالهٔ چهار رنگ مثبت است ــ هرنقشهٔ (مسطح) رامی توان با چهار رنگ نقاشی کرد . از جهت دیگر فرض کنید حکم پ یک حکم تجربی است .

بنابراین باید تهیهٔ نقشه‌ای با پنج رنگ ، یا بیشتر ، ممکن (در مفهوم ریاضی امکان) باشد . چون این تنها موردی است که ، توفیق یا عدم توفیق در تهیه نقشه‌ای با پنج رنگ ــ یا بیشتر ــ توسط شخصی ، سوالی تجربی خواهدبود . پس هرگاه دستگاه قواعد زبان آنقدر گسترده باشد که بتواند در مورد اینکه آیا حکم پ حکمی تجربی یا حکم ریاضی ضروری است تصمیم بگیرد ،باید آنقدرگسترده باشدکه‌بتواند درمورد مساله چهار رنگ نیز تصمیم بگیرد . وبه‌طورکلی ، اگر وجه تمایز بین احکامی که صحت (یا کذب) آنهاحائز صفات مشخصهٔ‌تجربی است به‌وسیلهٔ‌قواعدزبان معین شود ،پس تمام حقیقت ریاضی (درهرصورت در ریاضیات ترکیباتی) نیزبه وسیلهٔ قواعد زبان معلوم ومعین می شود .

این رای برحسب ظاهر ساده ، که بررسی *زبانی* به تنهایی می تواند مسائل حقیقت (یا عدم حقیقت) ریاضی را از مسائل مربوط به صدق (یا کذب) تجربی (یا اخلاقی ، یا کلامی ، یا قانونی ، یا درهر صورت غیر ریاضی) متمایز کند ، درحقیقت بسیار ساده تراز نظر رادیکالی است که می گوید : بررسی زبانی نه تنها می‌تواند مشخص کند که سوال "آیا چنین است که P ؟ " سوال ریاضی ، یا تجربی ، یا هر گونه سوال دیگری است ، بلکه می‌تواند پاسخ سوال را نیز هرآینه که خود سوال ، سوالی ریاضی باشد ، مشخص کند . به نظرمی رسد که نه تنها بررسی *زبانی* به ازای مفهومی عقلائی ، نمی‌تواند مشخص کند که چه چیزی ضرورت (یا امتناع) ریاضی دارد ، و چه چیزی **حکمی** ممکن است ، حتی به نظر مشکوک می‌آید که چنین بررسی‌هایی بتوانند مجموعهٔ احکام تثبیت شدهٔ ریاضیات محض را تعیین کنند ، (برای مثال احکام تثبیت شده‌ای را مانند حکم ب درنظر بگیرید . بعضی از چنین احکام متعلق به ریاضیات محض‌اند ، یا بنابرهر تعریفی ، عقلائی ، هستند ، و بعضی دیگرــ به همان صورت عمومی حکم ب و منتسب به دستگاهی مانند E.S. ــ تنها حقیقتی‌ممکن دارند ، یعنی به دلیل اینکه برخی نوشتارهای محدود ممکن ریاضی در الفبای ذکر شده درحقیقت وجود ندارند صحیح هستند .) . در هر صورت این اشکال رامی توان با شگردی خاص برطرف کرد : می‌توانیم تصریح کنیم که یک حکم اثبات شده شامل دراحکام ریاضیات **محض** نیست ، مگر نهاده‌های خاصی در عبارت سازی آن مثلا " (وجود داشتن لفظی مانند *لزوم ریاضی*) ، یا در بافت آن (مثلا " خود حکم آخرین مرحله در یک اثبات فرضی ریاضی باشد) دلالت برراستی آن حکم تنها به خاطر دلایل ریاضی،کرده باشد .

یک بار دیگر تسلیم عادت حرفه‌ای می‌شویم و اعتراضی دیگر مطرح‌می‌کنیم اعتراض این‌بار این است که حکم **پ** دو معنای متفاوت دارد: اگر منظور از حکم **پ** یک حکم ریاضی باشد، یک معنی خواهد داشت و چنانچه مراد از آن یک حکم تجربی باشد، به معنای دیگرست. جواب به این اعتراض چنین است : چه خواهد شد، اگر من منظورم تنها این بوده باشدکه : هیچ کس، هیچ گاه، آنچه را که تعیین شده‌است انجام نخواهد داد ؟ آیا واقعا" می‌شود فرض‌کرد که این حکم مبهم است، و این که شنونده، تنها درصورتی که مبانی فکری مرا بداند می‌تواند پی به معنایی که من اراده کرده‌ام ببرد؟ گمان می‌کنم که در این مورد **ویتگنشتاین** این ابهام را چنین توجیه می کرد: اگر مقصودم از حکم **پ** *حمل* باشد، درآن صورت من حکم **پ** را به عنوان یک حکم ریاضی به کار نمی‌برم، ولی اگر نخواهیم هیچ چیزی را به عنوان ضد حکم **پ** درنظربگیرم آ در آن صورت حکم **پ** را به عنوان یک حکم ریاضی بکـــار می برم. **مابقی** این مقالهٔ بررسی ونقدمضمون ذیل است :

قبول کردن یک حکم به عنوان یک حکم ضروری
ریاضی چگونه چیزی است ؟

تجدید نظر در احکام مثبت ریاضی

امروزه بنابر دیدگاهی متداول ، قبول به این که حکمی حقیقت ریاضی دارد، به طریقی که درست تصریح نشده، برمبنای قبول یک ضابطهٔ زبان، یا یک تصریح، یا یک ضابطهٔ ترسیمی، و غیره، است. مسلما" مفاهیم امکان و امتناع دارای اهمیت قابل توجهی در ریاضیات هستند.

اگر بگوئیم حکمی حقیقت ریاضی دارد معادل است با اینکه گفته باشیم نفی آن حکم ممتنع است (مقصودما از امتناع، امتناع ریاضی است .) . اگر بگوئیم حکمی حقیقت ریاضی دارد، برابر است با اینکه گفته باشیم که آن حکم ضرورت ریاضی دارد. اما من نمی‌توانم قبول کنم که ضرورت معادل است با عدم تجدید نظر. هیچ کس اینقدر گمراه نمی‌تواند باشد که برگفتن **ضرورت *ریاضی*** و ***مبرا* از تجدید نظر** پای بفشارد و ابرام بورزد که عباراتی مترادفند، ولی پاره‌ای دیگر از آنچه امروزه در فلسفه متداول است این است که گفته شود: " منظور این نیست که x چه معنی دارد؛ بلکه مساله

این است که فعل **بیان کردن** x بر چه دلالت می کند ؟ " ، و متاسفانه ممکن است این عقیده گسترش پیدا کرده باشد که صرف بیان کردن اینکه گزاره P ضرورت ریاضی دارد، و یا حتی تثبیت کردن P بر مبنای دلایل واضح ریاضی، ویا دراعمال دقیق ریاضی ،دلالت بر این بکند که گوینده هیچ چیزی را به عنوان ضد P درنظر نخواهد گرفت، و یا حتی ضابطهٔ " هیچ چیز نمی تواند ضدP شمرده شود " را قبول می‌کند. این نظریه پالایش متاخری است از نظریه‌ای که در نوشته‌های **آیـــر** و **کارناپ** دیده می‌شود. بنابرمبنای این دیدگاه‌احکـام‌ریاضی نتیجهٔ قواعد لغوی هستند. موضع **آیـــر** و **کارناپ** می‌تواند به این منتهی شـــود که : " نتیجهٔ یک قاعدهٔ لغوی بودن مساوی است با منتج شدن (استنتاج ریاضی) از یک قاعدهٔ لغوی " ، پس تنها چیزی که گفته شده‌است‌این اســـــت کـــــه : " ریاضیات = زبان به اضافه ریاضیات " . این عقیدهٔ قدیمی تر ، عقیدهٔ **آیـر** و **کارناپ** قبل از پالایش اخیر هماهنگ با نفی **کشف** در ریاضیات است، و به عبارت دیگر هماهنگ با تثبیت اینکه کشف تنها به معنای روانی قابل قبول است .

این فلاسفه را رای براین است که در یک استدلال (یا قیاس) ریاضی اطلاعاتی را که از نتیجه کسب می کنیم در مقدمه شامل است، ولی به خاطر دلائل **روانـــی** ما در بعضی از موارد نمی‌توانیم شمول نتیجه در مقدمه را درک کنیم . اما با بررسی دقیق آشکار شد که این گروه فیلسوفان صرفا" اطلاعات را دوباره تعریف می کنند و سپس می گویند که گزاره‌های برابر در ریاضی اطلاعات یکسانی را می‌رسانند . و به ازای این موشکافی بیهوده در مفهوم *اطلاعات* تنها اطلاعات کسب شده از یک استدلال قیاسی آنهایی هستند که قبلا" در مقدمه شمول داشته‌اند . و عدم توانایی دید ما، خواه در واقع چنین باشد یا نه، اصلا" احتیاج به توضیحی مخصوص (چه روانـــی و چه هر گونه توضیح دیگری) نخواهد داشت. حتی برعکس، زمانی ما احتیاج به توضیح روانی خواهیم داشت که شخصی را مشاهده‌کنیم دارای چنان قدرتی (اگر واقعا" چنین موجودی پیدا شود) که بدون اشتباه، و درآن واحد، بتواند تساوی ریاضی دوگزاره را، صرف نظر از تفاوت در ساختمان نحوی گزاره، و تفاوت در تعبیر لغوی آن دو (تعبیر لغوی در مفهوم زبان شناسی) گزاره مشاهده کند. نه تنهـــا **آیـــر** و **کارناپ** به‌هیچ وجه نتوانستند عدم کشف در ریاضیات را نشان دهند، بلکه تنها چیزی را که توانستند بیان کنند، همان گویی بی ارزشی است که می گوید : در یک استدلال محکم ریاضی نتیجه، الزاما" (لزوم ریاضی) از مقدمه

کسب می‌شود .

پالایش اخیری را که در بالا ذکر کردیم از تهی بودن نظریهٔ **آیـــر** و **کارناپ** احتراز می‌کند .

قبول کردن حکمی به عنوان حکمی ریاضی و ضروری ، مساوی است با قبول کردن یک ضابطه بدون تصدیق به اینکه آن حکم به عبارتی (که باید تشریح شود) خود نتیجه (و یا تالی) آن ضابطه است . بنابراین ، پالایش اخیر ، هم رادیکال تر و هم شایان توجه بیشتری است تا نظریهٔ قدیمی تر **آیـــر** و **کارناپ**

چنین ضابطه‌ای را نه خود سرانه ، بلکه به خاطر طبعمان می پذیریم (و به خاطر طبیعت اشیایی که با آنها برخورد می‌کنیم ، از آن جمله اثبات‌ها) . اینکه دنباله‌ای از علائم وجود دارند که ما را وادار می کنند بگوئیم : " مکعب برابر با دو مکعب دیگر ممتنع است (امتناع ریاضی) " به راستی یک کشف است . ولی البته نباید به خاطر تصویری از واقعیت ریاضی ، در انتظار کشف در یک ملکوت **افلاطونی** ، گمراه شویم ، یا اینکه تصور کنیم که یک شیء خودش فی نفسه اثبات است هر آینه طبع مان مارا واد ار به استفاده از آن به عنوان اثبات نکرده باشد .

کدام طلبهٔ فلسفهٔ ریاضی اخیرا " چنین گفته‌هایی را نشنیده‌است ؟ و کدام طلبهٔ عاقل از چنین‌گفته‌هایی ناراحت نشده‌است ؟ مسلما " یک‌اثبات ریاضی عمیق تر است از دنباله‌ای از علائم نقش برجسته بر صفحهٔ کاغذ و یا بر سطح ماسه . اگر علائم در زبان حاوی معنی نبودند ، و اگر انسانها گفتگو نمی کردند ، و اگر اندیشهٔ ریاضی نمی‌داشتند ، و اگر اثبات ها را دنبال نمی‌کردند و جزاینها ، همان دنبالهٔ علائم هیچ اثباتی‌نمی‌بود . ولی همواره صحیح می‌بود که هیچ مکعبی برابر مجموعه دو مکعب دیگر نیست (ولو هیچ کسی آنرا اثبات نمی‌کرد). درحقیقت ایـــن فلاسفهٔ اخیر تثبیت مزبور را نفی نمی کنند ، ولی می گویند ، تاکید می‌کنیم ، که نباید به‌خاطر تصویری از واقعیت ریاضی ــ حقیقتی که تا ابد ماسوای طبیعت انسان و اندیشیدن وتفکر باقی خواهد ماندــگمراه شد . ولی شخصا " چنین تصویری را گمراه کننده نمی بینم . وهیچ کسی تابحال به مادقیقا " نگفته‌است چگونه و چرا چنین تصویری باید گمراه کننده باشد . برعکس ، چنین اظهار رای می‌کنیم : آن تصویری که بر مبنای آن قبول کردن یک گزارهٔ ریاضی ، برابر با قبول کردن **قاعدهٔ ترسیم** باشد حتما " گمراه کننده است . و به طریقی گمراه کننده است که‌می‌توان آن را دقیقا " چنین بیان کرد : این تصویر گمراه کننده است چون چنین تکلیف می‌کند که هر آینه

من یک امر تثبیت شدهٔ ریاضی را قبول‌کنم ، حق نخواهم داشت هیچ چیزی را به عنوان ضد آن به شمار بیاورم . و روشن است که چنین پیشنهادی احمقانه است ! ولی هرآینه این پیشنهاد احمقانه رابه‌کناربیاندازیم ، چه چیـزی ازآن دیدگاه والا و پیچیدهٔ مورد بحثمان باقی خواهد ماند ؟ به راستی نه تنها می‌توانیم عقیده مان را در بارهٔ حقیقت و یا نادرستی احکام تثبیت شدهٔ ریاضی تغییر بدهیم ، بلکه در نظر من ، درجات مختلفی از تجدید نظر در ازای آنچه در ذهنمان متصور می‌شود وجود دارد ، حتی در نظریهٔ ابتدائی اعداد .

برای توضیح بیشتر در مورد امر اخیر حکم **هیچ مکعبی مساوی مجموعهٔ دو مکعب دیگر نیست** را در نظر بگیرید . من این حکم را قبول می‌کنم ، چون می‌دانم که می‌توان آن را در حساب مرتبهٔ اول اثبات کرد . اکنون فرض کنیم که من عدد ۱۷۶۹ را به توان سه برسانم و به آن عدد ۲۶۹ به توان سه را اضافه کنم و فرض کنیم کشف می‌کنم که حاصل جمع دقیقا" ۳(۱۸۷۲) است . آیا واقعا" فرض شده است که من نباید این رویداد تجربی را (عمل حساب کردن ، و غیره ، را که انجام می‌دهم) ضد حکم تثبیت شده ریاضی بشمار بیاورم ؟ قبول کردن هر گزارهٔ P معادل است با عدم قبول کردن $\bar{P}$ (ضد P) تا زمانی که P را قبول دارم (اصـــل تناقـــض) .

بنابراین قبول ($x^3+y^3 \# z^3$) برابر است با عدم قبول (تجربهٔ من از عمل حساب کردن) تا وقتی که هنوز ($x^3+y^3 \# z^3$) را قبول دارم . ولی بین عدم قبول عمل حساب کردن و قبول این قرارداد که نباید اجازه داده شود هیچ تجربه‌ای در دنیا ($x^3+y^3 \# z^3$) را نفی کند (که احمقانه است) تفاوت بسیاری است .

اما در واقع چنانچه احیانا" کشف کردم که ۳(۱۸۷۲) = ۳(۲۶۹) + ۳(۱۷۶۹) ، به راستی که چه کار باید بکنم ؟ در وحلهٔاول به خود اثبات برخواهم گشت تا اشتباهی درآن پیداکنم . ولی اگر به این نتیجه رسیدم که آن اثبات در حساب مرتبهٔ اول صحیح است ، می‌بایست که سپس حساب مرتبهٔ اول را اصلاح کنم ــ که تکان دهنده خواهد بود . ولی واضح است که در چنین اصلاحی احکام صرفا" منفرده (۱۲= ۷+۵ ، ۲۰۱ = ۱۲+۱۸۹ ، ۶۸ = ۲×۳۴ و غیره) را مقدم بر احکام عمومی ($x^3+y^3 \# z^3$) باید دانست . احکام عمومی رامی‌توان با یک حکم منفردهٔ ضد ، نفی کـــرد .

گنتزن• مثال قانع کننده‌ای از اثبات‌ساختمانی (در واقع از سازگاری حساب مرتبهٔ اول) داده است، که قابل قالب ریزی در حساب مرتبهٔ اول نیست. این اثبات در بسیاری از جایها اشتباه فهمیده شده‌است، چونکه در آن ازروش استقراء فرانهائی (ترانسفینی) استفاده شده‌است. بحث در این نیست که **گنتزن** از روش های فرانهایی استفاده کرده‌است، بلکه برعکس، روش های فرانهائی در بعضی از موارد از دیدگاه ساختمانی قابل توجه‌اند. چون استقراء ε_0 در ریاضیات ساختمانی، اولیه به شمار نمی‌آید. برعکس برای $\alpha < \varepsilon_0$ استقرای α ای می‌تواند به استقرای معمولی تلخیص و تبدیل شود، و حتی در حساب شهود گرای این امر صادق است. و اگر ما به حساب شهود گرای اصل بدیهی ساختمانی را اضافه کنیم، چنین می‌شود: اگر در دستگاه حساب شهود گرای بتوان قبول اثبات کرد که برای هر مجموعه‌ای عدد n, $F(n)$ قابل اثبات است، پس $(x)F(x)$ در آنصورت می‌توانیم تمام اثبات **گنتزن** را قالب ریزی کنیم، حتی اگر متغیرهای پا بند ما تنها در اعداد حقیقی برد داشته باشند، و مطلقا" نه در اردینال ها (در معنای کلاسیک آن).

به این مطلب اشاره می‌کنم چون به اهمیت آن معتقد هستم و روش‌های اثباتی ای وجود دارند که هرکس آنها را مسلم و بدیهی شان می‌دارد، و این روش ها تماما" ساختمانی هستند، لکن خارج ازحساب مرتبهٔ اول.

اکنون فرض کنیدچنین اثباتی که ω ناسازگاری حساب مرتبهٔ اول را تثبیت می کند در دست داشته باشیم (در حقیقت چنین حالتی پیش نخواهد آمد، چون **چارلز پارسن** اثبات ساختمانی ω سازگاری حساب مرتبهٔ اول را ارائه داده است.). خیال کنید که اثبات مفروض تماما" آشکار است، و بعد از خواندن آن مجاب می‌شویم که درحقیقت می توانیم اثباتهایی برای $\{\sim F(O), \sim F(I), ..\}$ بسازیم. برای فورمول دلخواه F به طوریکه $E(x)F(x)$ در حساب مرتبهٔ‌اول اثبات شده باشد. اگر F یک خاصیت تصمیم پذیر، از اعداد صحیح باشد، آنچه گفتیم برابر خواهد بوذ با اینکه $F(O), F(I), F(2), \ldots\ldots$ کلا" غلط باشند ولو $E(x)F(x)$ قابل اثبات باشد. و این برابر است با اینکه حساب مرتبهٔ اول نادرست است، چون $E(x)F(x)$ هرچند که قابل اثبات، لکن آشکارا" غلط است.

من چیز غیر قابل تصور دربارهٔ وضعی را که بیان کردیم نمی‌بینم ، پس همانطوری که قبول $(x^3 + y^3 \neq z^3)$ مرا از قبول ضد آن باز نمی‌دارد ، هرآینه چنین رابطه‌ای راپیداکردم $(۱۷۶۹)^۳ + (۲۶۹)^۳ = (۱۸۷۲)^۳$ چنین ضدی خواهد بود اگر حسابش درست باشد : پس قبول $E(x)Fx$ مرا از قبول نفی اثبات آن ، وقتی چنین چیزی را مشاهده کنم ، باز نخواهد داشت (چنین نفی‌ای تثبیت می‌کند که $\sim F(O), \sim F(I), \sim F(2), \ldots$ همه در حساب صحیح هستند . از طریقی قاطع‌تر از آنچه در اثبات $E(x)F(x)$ به کار برده شد) . و بطور کلی حتی اگر یک حکم ریاضی اثبات شده باشد تصور نادرستی آن ممتنع نیست ، و هیچ قانونی وجود ندارد که چنین مضمونی را افاده کند : **هیچ چیزی نباید ضد حکم *اثبات* شده شمرده شود .**

نوع دیگری از تجدید نظر در ریاضیات خیلی واضح است و احتیاج به توجه زیادی ندارد : ***ممکن است ما به اشتباهی در اثبات بر بخوریم .*** عموما" پیشنهاد شده است که چنین حالتی درحقیقت تغییر رای دادن دربارهٔ سوال ریاضی مربوطه‌نیست ، ولی چرا نیست ؟ ممکن است سوال: " آیا این شـــیء مقابل من اثبات S در E.S. است ؟ " سوال ریاضی نباشد ولی بهر حال من عقیدهٔ خودم را در مورد سوال : " آیا صحیح است که S ؟ " تغییر نمی‌دهم ، ولی احتمال دارد این سوال اخیر ، سوال ریاضی باشد . به راستی اگر من قبلا" قید اینکه : " هیچ چیزی را نباید ضد S شمرد " ، را قبول کرده باشم ، در آن صورت چگونه در یک کشف تجربی ــ که مثلا" یک دنبالهٔ مشخص نوشتارها آن عضو مشخصـــه را که من فکر می‌کردم ، ندارد ــ رای مرا نسبت به گزارهٔ ریاضی S تغییر خواهد داد ؟ حالت بخصوص جالبی پیش می‌آید وقتی خود S گزاره‌ای دربارهٔ اثبات در یک دستگاه صوری ، مثلا" F در L قابل اثبات است ، باشد . چون چنین واقعیت هایی در مقابل **قاعدهٔ ترسیم** بخصوص ایجاد اشکال می‌کنند ، چنانچه تمام واقعیت های وجودی ترکیب پذیر حائز این مشکل هستند ، مثلا" : ***عدد فرد کاملی وجود دارد*** ، اگر چنین حکمی صحیح باشد ما می‌توانیم عقیده‌مان را دربارهٔ چنین احکامی ، برای هرچند بار ، و به طور نامحدود ، تغییر دهیم (اگر اثبات بسیار طولانی باشد) ، شیوهٔ برخورد ما با آن بستگی دارد به مسائل قوی تجربی ، از آن نوعی که به آن در بالا اشاره کردیم ، ممکن است‌گذشته از : ***اثباتی برای F در L وجود دارد*** ، دلیل دیگری برای چنین واقعیتی موجود نباشد ، یعنی ما اغلب هیچ راهی برای

تثبیت این گونه احکام ، بجز ارائه دادن *حالت مثالی* ، نداریم ، و کشف چنین حالت مثالی یقینا " همانند *کشف* به مفهوم اصلی لغت کشف است .

ولی هنوز شگری برای مدافعان مکتب ضابطهٔ زبانی وجود دارد ، یعنی می‌توانند بگویند : " تنها چیزی که شما نشان داده‌اید این است که ممکنات طبیعی گوناگونی می‌توانند موجب گردند تا ما در قواعد و باور داشت‌های خودمان به طور نامحدود تجدید نظر کنیم . ولی این نفی وجه تمایز بین تجدید نظر در یک رسم و تجدید نظر در یک *قاعدهٔ رسم* ، نیست . " . اما این شگرد زیاده از حد موفقیت آمیز است : چون هر حکمی رامی‌توان به عنوان *قاعدهٔ زبانی* گرفت ، چون می‌توانیم بگوئیم : " خوب ، آنها ضابطهٔ خود را تغییر داده‌اند " . پس هر آینه خود گوینده آن حکم را نفی کرد ، ما هم آنرا نفی می‌کنیم . ولی چرا ما این شیوه را نباید یک بارو برای همیشه کنار بگذاریم ؟ .

در خاتمه لازم می‌دانم از اینکه هیچ توضیح مثبتی درباب حقیقت ریاضی و ضرورت ریاضی ، هیچ کدام ، به دست نداده‌ام پوزش بخواهم . تنها باید بگویم که این توضیح را نداده‌ام چون فکر می‌کنم دنبال چنین توضیحی رفتن اشتباهی بنیادی است . نباید پنداشت که وجه ممیزهٔ بخصوصی در مورد ریاضیات وجود ندارد . برعکس وجه ممیزهٔ بخصوصی به نظر من وجود دارد و چنین است : متجسس در ریاضیات باید حقیقت ریاضیات را به عنوان فرض قبلی یا پیشینه فرض قبول کند ، نه اینکه دنبال توضیح آن برود . به هرحال ، این بحث آغازی است بر مقالهٔ دیگری و نه نقطهٔ حتمی بر مقالهٔ حاضر .