

حسین ضیائی: محله "الکوریبیم" شماره ۲۲، ۱۳۵۸.

بحثی احمالی بپیرایهٔ مسائل معانی و فلسفهٔ ریاضی

الف - مقدمه :

به‌ظور کلی فلسفهٔ ریاضی تا بهین تحقیقات در بارهٔ مفهوم ریاضی و بررسی مسائلی که معانی ریاضیات بر می‌آید، و مسیحی است از فلسفهٔ ولی به دشواری می‌توان گفت که دقیقاً جزئیات مسائل مشمول فلسفهٔ ریاضی چه چیزهایی هستند تا این زمان، چه در زمان قدیم و عصر فلسفهٔ کلاسیک وجه در دوران معاصر، کتاب‌های نوشته شده است که دربرگیرندهٔ تمامی مطالبی باشد که به نحوی به فلسفهٔ ریاضی مربوط می‌شود. مآلهٔ فقدان یک کتاب مرجع کامل و شامل، خودگویای شده‌ای از چگونگی تحقیق در فلسفهٔ ریاضی است. مسائل فلسفهٔ ریاضی هم داخل در علم ریاضیات (خصوصاً مسائل معانی ریاضی) هستند، و هم داخل در علم فلسفه. بنابراین چنانچه تخمی حواسته باشد وارد در بحث فلسفهٔ ریاضی بشود، باید از طرفی به نحوهٔ روش تحلیل فلسفی و از طرف دیگر به روش تحلیل ریاضی آگاهی و تسلط داشته باشد. در طی تاریخ، متفکران مهمی فکر خود را مبدول و معطوف به حل مسائلی داشته اند که می‌توان آنها را در زمرهٔ مسائل فلسفهٔ ریاضی دانست؛ و نیز چون بسیاری از مسائل معانی ریاضیات مسائل فلسفی

هستند. هرگاه ریاضی دانی به این مسائل پرداخته نتایج تحقیقاتی و تفکراتش جنبه‌های فلسفی مهمی را نیز در برداشته است. مثلثاتی " اقلیدس " درباره " ماهیت نقطه می اندیشد پاسخ می راکه به سوال " نقطه چیست؟ " می دهد پاسخ فلسفی است ؛ چون مربوط به مسائلی می شود که در حوزه علم هستی شناسی قرار دارد. برای اینکه بتوانیم موضوع فلسفه ریاضی و ماهیت آن را به نحو کاملی بیان کنیم ناگزیر باید اول بکوشیم تا مسائل را که به نظرمان مسائل فلسفه ریاضی می آیند برشماریم.

فلسفه همواره با سوال آغاز میشود. در طی تاریخ، نظام های فلسفی متشکل بوده است از مجموعه پاسخ های افرادی که با این علم سروکار داشته اند. اکثر سوال ها ، از همان بدو شروع تفکر منظمی که فلسفه نامیده شده است تا کنون به قوت خود باقی هستند، تنها پاسخ ها تغییر پذیرفته اند و کامل تر شده اند. مثلا " سوال " عدد چیست؟ " - حداقل از زمان " فیثاغورث " تا امروزیکی از سوال های اصلی فلسفه ریاضی به شمار می آید. جنبه های این سوال : " آیا عدد مفهومی و تصویری است کمالا " مجرد از ماده که وجود آن تنها در ذهن متحقق می گردد؟ " و " آیا عدد منترج از ماده است ولی در دنیای خارج از ذهن مصداق می یابد؟ " ، و " آیا عدد درجه ای است از تجلی حقیقتی مثالی که والاتر از ذهن بشر است؟ " ، و " آیا عدد مورثی است ساخته ذهن بشر داخل در نظام بدیهی و یا موضوعی و اصل متعازفی ، که آنها ساخته ذهن است؟ " . پاسخ به این گونه سوال ها در طی سالیان دراز تاریخ

فلسفه و تاریخ ریاضیات همواره ذهن متفکران را به خودمشغول می‌داشته و در ضمن سازنده نظریه‌های مکتب‌های مختلف میانی ریاضیات بوده است. با اندک تا مل در ماهیت این گونه‌سئوال‌ها می‌توانیم نتیجه بگیریم که نه تنها درباره اکثر مفاهیم ریاضی بلکه درباره خود مفهومی ریاضی نیز می‌توان از این قبیل سئوال‌ها مطرح ساخت. قدر مسلم این است که می‌توانیم تعداد بیشماری پرسش فلسفی درباره ریاضی و مسائل جزئی ریاضیات مطرح کنیم ولی برای اینکه بتوانیم به نتیجه برسیم و بتوانیم حدود معینی را برای پاسخ‌هایمان مشخص کنیم، باید اصول و مبانی سئوال‌ها را پیدا کنیم؛ و این خود مستلزم آن است که اصول نظریاتی را بنیان بگذاریم که سئوال‌های مختلف بر آن متکی می‌توانند بود. به طور خلاصه اگر قائل به تعریف کلی از فلسفه: که "تحقیق درباره ماهیت اشیا به قدر طاقت بشر" است، باشیم، وجود، حقیقت، امتداد مقولاتی و رابطه اشیا، ریاضی را در ارتباط با موضوع مدرک (مثلاً خود ریاضی دان) باید در فلسفه ریاضی مورد بررسی قرار دهیم. البته دید فلسفی ما یقیناً "در نحوه" تحلیلی که از وجود و حقیقت اشیا، ریاضی انجام می‌دهیم تاثیر می‌گذارد، و مثلاً اگر دید کلی ما از شناخت دیدی اشرافی، آرمان‌گرا یا واقع‌گرا باشد، مسائلی را که مربوط به شناخت اشیا، ریاضی می‌شوند به شیوه خاص مبتنی بر دید کلی فلسفی بیان خواهیم کرد.

پی‌ازیک سوفلسفه ریاضی تحقیقی است فلسفی از ریاضیات؛

اما از سوی دیگر، چون فلاسفه همواره شیفته، دوجنبه، کلی ریاضیات
یعنی نظام -پردازی و دست ساختمان قضاای ریاضی (مسلم بودن
نتایج دستگاه های اصل متعارفی) بوده اند، نتایج ریاضیات
همواره در خودبیتش فلسفه و شیوه تحلیل فلسفی تاثیرزیساد^ی
گذاشته است البته خودساله نظام پردازی در ریاضیات دامنه
وسعی دارد که محتاج به توضیح نیست و روش اصل متعارفی که در
ریاضیات تا این اندازه پیشرفته است، دارای مبانی فلسفی
است و منتج از سئوالهایی است که در اصل شناخت و سپس از شناخت
ریاضی مطرح شده است. ما نیز چنانچه بخواهیم به طور منظم پیش
رویم اولین مساله ای را که باید طرح کنیم (و این مساله ایست
که همواره در حیطه ریاضیات مطرح شده است) مساله بررسی
ریاضیات از نقطه نظر شناخت شناسی است؛ و در بدو شروع به چنین
بررسی ای مساله ما تقدم بودن مفاهیم و معرفت های ریاضی
پیش می آید. جای تعجب نیست که اکثر فلاسفه و بخصوص " کانت " که
این مساله را به طور منظم بررسی کرده بود، ریاضیات را معرفتی
ما تقدم و از پیش موجود می دانند. ولی اخیراً " برخی از ریاضی دان^{ها}
که گرایشی به مطرح کردن سئوالات فلسفی در ریاضی دارند، مثلاً "
" فرگه " و " وائل " سعی کرده اند که با ارائه دادن تحلیلات
منطقی درباره مفاهیمی مانند مجموعه و اعداد طبیعی ریاضیات
را، به نحوی، داخل در قلمرو منطق بدانند و منطق را هم روابط
بین مورتهای ساختمان پذیرفته در نظام های مختلف قلمداد کنند

(یعنی قائل به وجود مستقل ریاضی نیستند). بی‌سواله معرفت ما تقدم و معرفت ما تا، خروتجربی مساله ایست فلسفی هم در رابطه با مفهوم ریاضی بطور کلی وهم در رابطه با مفاهیم جزئی ریاضی . سیر تکامل ریاضیات جدید بخصوص با در نظر گرفتن جنبه تجرد و وابستگی آن به دانش مجموعه ها همراه با مسائلی بود که به افلاطون گراشی موسوم هستند. در طی قرن نوزدهم ریاضی دانها نیز تنظیم قضایای حساب آنالیز، که بر مبنای اصول متعارف بنا شده بود، و در راه استوار ساختن قضایای آنالیز و حساب بر مبنای نظریه اعداد طبیعی از دیدگاه افلاطون گراشی کوششهای مبذول داشتند . در این مورد کارهایی که " کانتور " در مجموعه ها انجام داد اصول این نظام پردازش در ریاضیات را پی ریخت که جهتی به سمت تجرد هر چه بیشتر در ریاضیات داشت و شامل فرضیات افلاطون گرایشی بود. بحث در مساله افلاطون گراشی بالا گرفت و سه نظریه مختلفه میان گذاشته شد. حادثترین این سه نظریه ، که با مخالفت با نظریه کلی افلاطون گراشی برخاست ، شیود گراشی است که بانی آن " براور " ریاضی دان معروف هلندی بود. در مقابل این نظریه ، روشن هیلبرت قرار گرفته است که به نام صورت گراشی معروف شد، و نظریه سوم منطق گراشی نام دارد که بر پایه نظریات " فرگه " و " راسل " استوار گشته .

یکی از مهم ترین سائل فلسفه ریاضی سئوالی است درباره ارتباط ریاضیات با تجربه و این سئوالی است که از زمانهای قدیم

مطرح شده است. بدیهی معنی که آری ریاضی علمی است ما تقدم که
ماسوای تجزیه در مرحله اول، و ماسوای درک و تجربه موضوع مدرک
در مرحله دوم تحقق می پذیرد و منتظم می شود؟ یا اینکه آری ریاضی
علمی است بر مبنای تجربه موضوع مدرک (چه در ذهن وجه درحی و
یا هردو)؟ البته پاسخ کاملی رانمی توانیم ارائه دهیم که
بتوان آنرا اثبات کرد و احياناً "آنرا بعنوان فرضیه ای قبول نمود
ولی بررسی این مساله از دیدگاه های مختلف فلسفی و میانسی
ریاضی نمایانگر جوانب این مساله است و ما را بانحوه تفکر و شیوه
مختلف تحلیلی فلسفی - ریاضی در جهت بررسی این مساله آشنا
می سازد. باید متذکر شد که در ریاضیات عملی و در علوم عملی به طور
کلی چنین سئوالهای انتزاعی در سازگاری و نتیجه گیری الزاماً
راهی ندارد. و مثلاً برای یک فیزیک دان که از ریاضیات در
اندازه گیری پدیده های طبیعی استفاده می کند سئوال اینکه آیا
 $a=b$ و $b=c$ پس $a=c$ امری است بدیهی و یا اینکه
اصلاً موضع بدیهیات در یک نظام اصل متعارفی و ارتباط آن با
امول موضوع چیست، ممکن است سئوال بی موردی باشد. و شاید
بعضی ریاضی دانها قائل باین باشند که ریاضیات بدون بررسی
سئوالها و مسائل مبانی و فلسفی به کار خود ادامه خواهد داد و سازگاری
خود را از دست نخواهد داد، و مطرح کردن یا مطرح نکردن سئوالات
فلسفی پیرامون چیستی و حقیقت ریاضی ربطی به "پیشرفت" ریاضی
نخواهد داشت. البته موضع فلسفی و موضع ریاضی دانهائی مانند

فرگه ، کانتور ، برآوردهیلبرت ، و غیره ، از یک سو و فلاسفه به طور کلی این است که " پیشرفت " در ریاضیات محض را با کاربرد و یا عدم کاربرد مطالب مربوط نیست .

ساله حقیقت در ریاضیات نیز ، که یکی از اساسی ترین مسائل فلسفی - ریاضی است از نقطه نظری ریاضی دانان صرفاً " در رابطه با استحکام اثبات هاشی از صدق گزاره های ریاضی عنوان می شود ، این گونه ریاضی دانه اضمحلال اظهار این که ریاضی علم نیست معتقدند که حقیقت ریاضی صرفاً " بیانی است از شیوه های اثبات انتخاب شده در حل مسائل ، ولی اکثر ریاضی دانانی که قائل به گویا بودن موضع فلسفی - ریاضی هستند اعتقاد دارند که ریاضی علمی است دارای موضوع خاص و نتایج حقیقی فراگیر و دارای ماهیتی مشخص که والاتر و عمیق تر است از صرفاً " روابط منطقی بین گزاره های موری ، یعنی حقیقت ریاضی را صرفاً " یک حقیقتی منطقی نمی دانند .

از بیان مقدمه کوتاهی که ذکر شد نتیجه می گیریم که برای بررسی مطالب فلسفه ریاضی احتیاج داریم که موضع و اصول نظریات مختلف و مکتب های فلسفه و مبانی ریاضی باید مشخص شود .

۲- مکتب‌های مانی ریاضی :

۱-۲- مانی منطق گرای ریاضیات :

"لایبنیتز" فیلسوف شهیر آلمانی که یکی از بنیان گزاران منطق ریاضی به‌شمار می‌رود مصرا " قائل باین بود که نظام های ریاضی می‌توانند قالب خوبی برای مانی تفکر باشند. این امر دیدنی بیروان زیادی پیدا کرد. ولی نظریه دیگر او که حقائق ریاضی و منطق هر دو را مستقیما بر اصل تناقض $(\forall x \neg (P(x) \wedge \neg P(x)))$ می‌دانست، هرچند یکی از اصول منطق گرای است، در دیگر مکتب‌های مانی ریاضی بیروان چندانی نیافت. این نقطه نظر منحرفه این می‌شود که کلیه حقائق ریاضی و منطق در نهایت امر قائل به تجربه به گزاره‌های یکان هستند، و این عمل تجزیه شامل تعداد محدودی از مراحل است. مثلا " ما هر آینه مواجهه با یک بیان ریاضی $\phi(x_i)$ ندیم الزاما " خواهیم توانست پس از مراجعی محدود $(\alpha_n : |n| < \infty)$ را تجربه کنیم به یک گزاره یکان یا یک همان گوئی منطقی. مثلا " گزاره " مرکبی مانند $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ که همواره دارای ارزش یکان است، بدون توجه به ارزش‌های جداگانه اجزاء، متشکله آن (p, q, r) به عبارت دیگر این نظریه قائل باین است که تمام ریاضیات را می‌توان بر مبنای تعدادی گزاره صادق منطقی بر مبنای اصول منطق (یعنی ما هوای تجربه ذهنی مرحله به

مرحله از اثبات و ساختمان ریاضی توسط ریاضی دان) بنا نمود.

منطق گرایان با کوشش فراوان سعی کردند این برنامه را در ریاضیات به مرحله عمل در آورند و ریاضیات را بر مبنای روابط اصلی منطقی و گزاره‌های همواره صادق بنا نمایند. البته نظریه گزاره‌های یکسان مانند نظریه گزاره‌های تحلیلی "کانت" زیاده از حد ساده است که بتوان کلیه ریاضیات را بر مبنای آن بنا نمود، و انتقاد اصلی بر منطق گرایان این است که خود اصل تناقضی یک گزاره یکسان و به اصطلاح "کانت" یک گزاره ماتریم تحلیلی است، علی الخصوص که اصول منتج از اصل تناقض $A \Rightarrow \neg\neg A$ و $A \Rightarrow \neg\neg A$ ضروری، (به معنای اصلی فلسفی ضرورت) نیستند، چون در نظام های منطقی چندارزشی امکان مادی نبودن اصولی مانند $A \Rightarrow \neg\neg A$ را اثبات کرده اند. به عبارت ساده الزاما در ساختمان ریاضیات نمی توانیم شیوه و تعقل بلاواسطه ریاضی دان را کلا انکار کنیم.

علی ای حال موضع منطق گرائی توسط "فرگه"، "راسل" و پیروان آنها به صورت یک برنامه عملی درآمد. "فرگه" توانست به جای مفهوم گزاره‌ی یکسان - که در بدو امر چیزی جز نشان دادن شمول محمول در موضوع ($S \subset P \vee Q$) نمی بود - مفهومی منجم تر و گویا تر تحت عنوان تحلیلی به کار برد (این مفهوم برابر است با کاربرد دقیق نوعی خاص از استلزام: گزاره‌هایی مورد قبول در اصول هستند که بتوان آنها را صرفا از قوانین اصولی

منطق و شماریف مربوط به آنها استنتاج نمود.) و نیز "فرگه" موفق شده، بزعم خودش، تحلیل و تجزیه جقائق ریاضی را از طریق اقامه اثبات برای تحلیلی بودن گزاره انجام دهد. از این طریق "فرگه" و منطق گرایان توانستند نشان بدهند که علم حساب (حداقل در مرتبه اول) دارای خاصیت خاص تحلیلی است که خود مبتنی است بر قوانین اصلی منطق. یعنی مثلاً " $P_i(x)$ را بتوان در نهایت امر به P که گزاره‌ای همان و تحلیلی و یکی از قوانین کلی منطق است تبدیل نمود (با استفاده از ۱ - تبدیل یک نظام علامتی بدیگری ؛ ۲ - تنها استفاده از ضوابط محل و مفروض نبودن داشتن گزاره‌هایی که تشبیت نشده اند) :

$$P_i(x) \text{ و } \beta_i : \sum_{i=1}^m P_i(x) \beta_i \Rightarrow P$$

تحلیلی بودن علم حساب، چنانچه منطق گرایان نشان داده اند، بریک پیش فرضی بسیار مهم استوار است : قوانین کلی منطق بدیهی هستند. پس آغاز ساختمان ریاضی به نحوی با فطرت انسان آمیخته است. چون امر بدیهی بلا واسطه و دفعه مدرک است و تعقل فطری انسان در چنین تحرک ادراکی دخیل است و چون فطریات از جمله امور هستند که وجود آنها قائم بر ادله مابعدالطبیعی است (مثلاً نقش واهاالمورد در وجود فطریات)، پس ساختمان ریاضی نمیتواند صد در صد امری مکانیکی - منطقی باشد. این نکته مهم را منطق گرایان به کلی نادیده گرفته اند و اصولاً اشاره‌ای به چگونگی فطری بودن قوانین کلی منطق نکرده اند.

در اثبات تحلیلی بودن علم حساب ، منطق گرایان ، محتاج به یک سلسله تبدیل علائم اند . در مرحله اول تبدیل علائم الفاظ (و در حالت ترکیبی احکام) نمادین شده صرفاً " منطقی هستند . مثلاً " علائم متغییرات گزاره ها (p, q, r, S, \dots) ، و علامت عطف (\wedge) ، و علامت فصل (\vee) ، و علامت سلب (\neg) و غیره . ولی احکام نمادین شده در مراحل نهائی الزاماً شامل علائمی خواهند بود که بر حسب ظاهر منطقی بودن آنها ضروری نیست ، و تنها پس از اقامه براهین منطقی بودن آنها تثبیت می شود . پس در یکی از مراحل اثبات - از مقدمات تا نتیجه - تبدیل علائم منطقی صرف به علائم دیگر صورت می گیرد ، در این مرحله مهم تعریف و حد منطقی نقش مهمی را ایفا می کند . و در این جا اساسی ترین تفاوت داخلی در نظام مبانی منطق گرای ریاضیات وجود دارد . نظریات " فرگه " درباره تعریف و حد منطقی نظریه ایست واقع گرای یعنی حد منطقی را قولی که دلالت بر ماهیت بکنند می دانند و پس قائل به ماهیت قائل اشاره از برای اشیاء ریاضی معرف ، و نظریه " راسل " نظریه ای است نام گرا (*NOMINALIST*) یعنی تعریف را صرفاً " وسیله ای برای تبدیل یک سری علائم به علائم دیگر می داند . برای " راسل " تعریف صرفاً " بیانی است از ترکیب تازه ای از علائم بر مبنای ترکیبی از پیش شناخته شده و بنا بر این در اصل تعریف را قولی که دلالت بر چیزی بکنند می داند ، بلکه صرفاً " قابلیت ایجاد تسهیل در مراحل اثبات را دارد . بر مبنای چنین نظریه ای تعریف نوعی اختصار در

بیان مطالب دانسته شده است و برای " راسل " تعریف یک عدد خاصی (مثلا " وقتی می گوئیم تنها عددی که ۰۰۰)، یا یک طبقه از اعداد (مثلا " طبقه اعداد صحیح تقسیم پذیره دو) بیانی است از چیزهایی صرفاً " منطقی غیرمادی و ذهنی. نظر " راسل " در این مورد پیروان زیادی نداشتند و موضع حادی از منطق گرائی است. ولی موضع " فرگه " که از بینش فلسفی عمیق تردیلات می کند پیروان بیشتری دارد. " فرگه " معتقد است که اعداد اشیاء منطقی هستند و هدف فلسفه ریاضی این است که آنها را مشخص کند. البته، بزعم " فرگه " تعریف عدد مترادف با خلق آنها نیست بلکه تحدید چیزی است که استقلال وجودی دارد. برای " فرگه " تعریف عدد از طریق متمایز کردن در یک مرحله ساختمان ریاضی کافی نیست و نیز نمیتوان عدد را به عنوان یک اصل موضوعه تعریف کرد. باید عدد را از طریق تعریف " مشخص " نمود و باید تعریف قولی که دلالت بر ماهیت می کند باشد، پس باید وجود عدد از طریق تعریف بیان شود. تعریف " فرگه " از عدد بسیار مشهور و مفصل است و در این مختصر محالی برای بیان آن را نداریم ولی اصل حاکم بر نظریه " فرگه " چنین است :

بیان : " تابع $\Phi(\xi)$ دارای n ارزشهای یکسان ψ است " و تابع $\Psi(\xi)$ در ازای احکام همان ارزشی را بر دارد، میدانند
 تابع $\Phi(\xi)$ چنین است که ξ ها توسط اشیاء ریاضی مورد نظر " بر " می شود و $\Phi(\xi)$ را " فرگه " یک مفهوم می دانند اگر

درازای تبدیل اشیاء ریاضی به \mathcal{L} حکم دست آمده یک گزاره صادق (یا کاذب) باشد.

در بالا متذکر شدیم که منطق گرایان در برنامه ساختن ریاضی بر مبنای اصول کلی ریاضی از گزاره های همواره صادق استفاده می کنند. به عبارت دیگر گزاره های همواره صادق همان گویی های منطقی در برنامه منطق گرایان به عنوان مدلیسم در اقامه براهین استفاده می شود. این جبر گزاره ها شی از طریق بررسی توابع صدقی (TRUTH FUNCTION) دست می آید. مثلا تابع صدقی $f(p_1, p_2, \dots, p_m)$ مستقلا ضروری است اگر و تنها اگر ارزش کلی آن درازای ارزشهای متفاوت p_1, p_2, \dots, p_m همواره صدق باشد. مثلا گزاره مرکب $(p \wedge \neg p)$ همواره صادق است و یا گزاره $(p \supset q) \wedge p \supset q$ همواره صادق است (چه p و q صادق باشند چه کاذب). توابع صدقی را مبنای ثوابت منطقی (LOGICAL CONSTANTS) پنج گانه: رابطه عطف (۱)، رابطه فصل (۲)، رابطه لزوم (\supset)، رابطه نفی (\neg)، رابطه لزوم دوطرفه (\Leftrightarrow)، می شناسیم و بیان می کنیم. مثلا تابع صدقی عطف، که برای دو متغیر دارای چهار حالت است:

$$\wedge(p, q) \begin{cases} \wedge(T, T) = T & (T \text{ علامت صدق, } F \text{ علامت کذب}) \\ \wedge(T, F) = F \\ \wedge(F, T) = F \\ \wedge(F, F) = F \end{cases}$$

تنها در یک مورد منطقاً " ضروری است . به عبارت دیگر در ساختمان ریاضی ما از تابع $\wedge (p_1, p_2, \dots, p_m)$ به عنوان یک مقدمه مسلم تنها در موردی می توانیم استفاده کنیم که کلیه p ها صادق باشند. مثال دیگر تابع صدقی فعل است (برای دو متغیر)

$$V(p, q) \begin{cases} V(T, T) = T \\ V(T, F) = F \\ V(F, T) = F \\ V(F, F) = T \end{cases}$$

متوجه می شویم که از چنین تاسعی در موارد متعددی می توانیم به عنوان یک تابع منطقاً " ضروری استفاده کنیم ، یعنی $\forall (p_1, p_2, \dots, p_m) = T$ اگر $\exists p_k : p_k = T$ (یعنی تنها یک گزاره صادق). ارزش توابع منطقاً " ضروری در برناممه منطق گراشی کاملاً" مشهود است ، و چون طبقه توابع صدقی همان یا همواره صادق کاملاً" تعریف شده است ، و چون صرفاً " از طریق یک شیوه مکانیکی می توان توابع صدقی همواره صادق را شناخت چنین توابعی تماماً " به عنوان مقدمات مسلم در برنامه منطق گراشی و ساختمان ریاضی بر مبنای اصول منطق استفاده می شوند . ولی در ساختمان ریاضی منطق گرایان احتیاج به مقدمات دیگری دارند و در اینجاست که ضعف برنامه آنها دیده می شود. خود شیوه ساختمانی مورد استفاده " راسل " در کتاب معروفش " اصول ریاضیات " شیوه ساده ای است :

در ابتدا از مجموعه‌ای، مثلا S ، که علم بدان داریم شروع میکنیم در بدو امر شواهد چنین اقتضای کنند که S را قبول کنیم، ولی با مشکلات زیروبروی شویم: ۱- ادعاهای شناخت مربوط به S را سهولت نمی‌توانیم قبول کنیم (مثلا آیا صحیح است که

$$: (\forall a, \forall b : a, b \in S$$

۲- مسائل حل نشده در S وجود دارند (مثلا آیا صحیح است که

$$: (\forall a, a \in S, \exists e, e \in S \Rightarrow a \cdot e = e \cdot a$$

۳- درباره وجود عناصر نمیتوانیم تصمیم قاطع بگیریم (مثلا

آیا صحیح است که

$$: (\forall a, a \in S, \exists b, b \in S \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a = e$$

شیوه ساختاری موردنظر "راصل" در چنین مواردی S را برمی‌سازد مجموعه از پیش بیان شده در نظری می‌گیرد و "بنا" می‌کند (مثلا S را در مقابل یک گروه آبدی G بیان می‌کند). ولی اشکال عمده "راصل" در وجودی نه‌بیت است. آیا باید وجودی نه‌بیت را امری بدیهی بدانیم؟ و موضع آنها مانند دیگر اصول بدیهی منطق مانند عطف، فصل، اندخال، اندراج، وغیره؟ و یا اینکه باید وجودی نه‌بیت را بعنوان یک اصل موضوعه در ساختمان ریاضیات بپذیریم؟ "راصل" هر دو کار را کرد. در چاپ اول "اصول ریاضیات" وجودی نه‌بیت را بعنوان یک اصل بدیهی یا معترف قبول کرد و در چاپ دوم همان کتاب وجودی نه‌بیت را به عنوان یک اصل موضوعه پذیرفت. در هر دو مورد منطق گراشی با اشکال روبروست، چه اگر

ریاضیات تنها ما " متاخر بر منطق و منتج از آن است باید در ساختمان ریاضی در هیچ مرحله تعقل شهودی موضوع مدرک دخالتی نداشته باشد. ولی چگونه می توان بی نهایت را صرفاً " بر مبنای منطق شناخت. و اصولاً استفاده، بدون دقت و تعمق کافی، از مفهوم بی نهایت بالفعل در ساختمان ریاضی توسط " راسل " و " فرگه " ضمنی اساسی در فلسفه ریاضی منطق گراست.

۲-۲- مبانی صورت گرای ریاضیات :

قبلاً متذکر شدیم که افکار و آراء فلسفی " لایبنیتز " درباره ساختمان ریاضی و علی الخصوص مفهوم گزاره های یکسان او باعث تدوین و گسترش تفکر فلسفی در ریاضیات شد که آنرا بنام منطق گرایی می شناسیم. افکار فلسفی " کانت " باعث هدایت آراء فلسفی شد که در این قرن بدو صورت درباره فلسفه ریاضی تفکر می کند: " صورت گرایی " و " شهود گرایی ". برای " کانت " نقش منطق در ریاضیات همان نقشی است که در دیگر علوم، و به عبارت دیگر در دانستن، دارد. از نقطه نظر " کانت " هر چند قضایا و نتایج ریاضی مبتنی بر اصول متعارف توسط اصول منطق بدست می آیند، اصول متعارف و قضایای ریاضی خود اصول منطق نیستند و اعلا " تجلی خاصی از اصول منطق نیز نمی توانند باشند.

" هیلبرت " ریاضی دان معروف با الهام از تفکرات فلسفی " کانت "

برنامه‌ای را در ساختمان و فلسفه ریاضی تدوین کرده که به صورت گرایبی " موسوم شد. به گفته " هیلبرت " (و این نکته مخالف اصول منطق گرایبی است) چیزی که در استنتاج های منطقی و احکام مرکب منطق مفروض است از پیش در مفروضات اولیه تعقل داده شده ، یعنی ریاضی دان در ذهن خود از پیش اشیاء غیر منطقی متمبسی را ، که از طریق حدس فلسفی برای او آشکار است ، تلاوت می نماید و این اشیاء هستند که اصول تفکر ریاضی او را می سازند. یعنی برخلاف منطق گرایان در ریاضیات را مستقیماً بر اصول منطقی قابل ساخته شدن می دانند ، صورت گرایان اصول اولیه ساختمان ریاضی را در وجود اشیاء ضروری غیر منطقی می دانند. در این نوع ریاضیات تناقض های بنیانی وجود ندارد ، تناقض هایی که مستقیماً بر مفهوم بی نهایت بالفعل پایه های منطق گرایبی را متزلزل می کرد ، چون مفهوم بی نهایت بالفعل هیچ گونه رسم و یا تحدیدی از اشیاء متمبسی نیست و بنا بر این در برنامه صورت گرایبی مورد نظر نمی باشد. تفاوت بین " هیلبرت " و " براور " (سانی مکتب شیوید گرایبی) بر سر ریاضیات ترانسفینی از نوع " کانتور " است : " هیلبرت " با ریاضیات ترانسفینی از نوع " کانتور " می گذارد ولی " براور " می گوید تا به نحوی بیانی از بی نهایت را ارائه دهد. " هیلبرت " مفهوم واقعی ریاضیات محدود را از مفهوم آرمانی ریاضیات ترانسفینی متمبسی متمبسی سازد ، بنا بر این می گوید تا به نحوی اشیاء از سازگاری دستگاهی متشکل از ریاضیات محدود به انضمام ریاضیات ترانسفینی

را ارائه دهد. و برنامه " هیلبرت " مبتنی بر دو فرایند است :

- ۱- ریاضیات شامل ترسیمی از اشیاء و ساختمانیای معین است ،
- ۲- انضمام عناصر آرمانی به یک قضیه ریاضی مستلزم اثبات سازگاری دستگاه ریاضی مورد نظر است و اینجاست که به تعریف کلی از صورت‌گرایی می‌توانیم اشاره کنیم : ریاضیات علم دستگاه‌ها^۴ صوری است . یعنی ، و برخلاف منطق‌گرایی ، ریاضیات قدم به قدم توسط اثبات سازگاری دستگاه‌های صوری ساخته می‌شود ، و یک نظام کلی منطقی غیر مرتبط با موضوع مدرک نیست ، و همواره رابطه مدرک و مدرک در ساختمان منسدل است .

برنامه " هیلبرت " ، چنانچه ذکر کردیم ، در اثبات سازگاری^۵ نظام های صوری خلاصه می‌شود. البته اثبات اینکه یک دستگاه متشکل از گزاره‌های مختلف که خود بدین معنی است که نشان داده شود که هیچ دو گزاره متناقض وجود ندارد ، کار ساده‌ای نیست . چون این کار مستلزم این است که کلیه گزاره‌ها بررسی شوند و تنها در مورد نظام هائی که تعداد گزاره‌ها محدود و قابل شمارش هستند امکان پذیر است . این برنامه (در ذیل رعوی آنرا ذکر خواهیم کرد) بر مبنای دوشیوه اثبات : مستقیم و غیر مستقیم ، استوار گشته است . در بعضی از موارد می‌توان نشان داد که گزاره‌های متناقض الزاماً ، بخاطر رابطه بین اصول متعارف ، تعاریف و اصول موضوعه ، استنتاج نمی‌شوند ، و در موارد دیگر با فرض " مدل " های

ریاضی عدم تناقض را می توان نشان داد. به طور خلاصه صورت گرایان می گویند: ۱- اشیاء دستگاه صوری را درازای اشیاء متعین مشخص کنند. ۲- اصول موضوعه دستگاه صوری را در رابطه با اشیاء متعینی بر مبنای خود رابطه مشخص کنند. ۳- نشان دهند که به خاطر ۱ و ۲ هر استنتاجی که داخل نظام صوری انجام می شود الزاماً به تناقض منجر نخواهد شد. ۲ و ۱ گریزی است در مواردی که شمارش گزاره ها امکان پذیر نیست.

دستگاه صوری را چنانچه در ذیل آمده تعریف می کنند. اشاره می کنیم که نقش اشیاء متعین در چنین دستگاه هائی نقشی اساسی است و استفاده از آن نه تنها در فلسفه ریاضی که صورت گرائی را می پذیرد عنوان شده بلکه نفس وجود و ضوابط متشکله دستگاه های صوری کاربرد فراوانی در ریاضیات معمولی نیز دارد.

عناصر متشکله دستگاه های صوری عبارتند از:

۱- اصطلاحات فنی یا جمله ها (TERMS):

الف- داده های متعین (TOKENS). عبارتند از اشیاء

متعین مختلف. مثلاً "علائم روی کاغذ، سنگ ریزه،

و هرگونه شیئی متعین دیگر.

ب- اعمال (OPERATIONS). ضوابط و ضروب مختلف برای

تشکیل اصطلاحات تازه.

ج- ضوابط تمویر (RULES OF FORMATION). ضوابط ساختمان

اصطلاحات تازه. مثلاً:

$\exists R = \{R_i\}$, $\{x_i\}$ و $\alpha : R \alpha X \Rightarrow x_1 \in R_1, x_2 \in R_2, \dots$
 ۲- گزاره‌های مقدماتی (ELEMENTARY PROPOSITIONS)

احصاء عملیات گوناگون (یعنی X و \forall است، و غیره

($p_i = x_i \in R_i$)
 ۳- قضایای مقدماتی (ELEMENTARY THEOREMS)

الف- اصول متعارف. یعنی گزاره‌های مقدماتی که علی‌الطلاق هستند.

ب- ضوابط شیوه‌های استنتاج (RULES OF PROCEDURE)

اگر p_m و p_2 و p_1 قضایای مقدماتی هستند،

مشروط به شرط \sum_i و اگر Q یک گزاره مقدماتی

است در رابطه p_i به p_m و p_2 و p_1 پس Q

مادق است تذکرمی دهیم که کلیه اشکال قیاسی منطق

یک چنین صورتی را دارند.

برای اینکه فرما "درباره یک شیئی ریاضی بتوان تصمیم گرفت که

آیا داخل در یک دستگاه صوری هست یا نه باید سلسله مراحل تصمیم

گیری محدود باشد. به عبارت دیگر "محدود" بودن دستگاه صوری

یکی از شروط اصلی برنامه صورت‌گرایی است موفقیت "هیلبرت"

در قالب ریزی (FORMALIZATION) حساب مرتبه اول نقطه اوج

مبانی صورت‌گرای شمار می‌آید، ولی اثبات قضیه عدم تمامیت

(INCOMPLETENESS THEOREM) توسط "گدل" ضربه ای

بنیانی به پیروان مکتب "هیلبرت" وارد کرد و سئوالهای اساسی

فلسفی را در مورد ریاضیات و علی الخصوص در مورد ریاضیات به عنوان علم دستگاه های صوری و ریاضیات به عنوان یک دستگاه منطقی ، عنوان نمود . از نقطه نظر مبانی فلسفی ریاضیات این نکته حائز فرایوان است چون می توانیم با قاطعیت بگوئیم که تنها قالب ریاضی نظام پردازی ، اصل متعارفی کردن و اصول منطق را اصل قرار دادی برای ساختمان ریاضی کافی نیست و همواره وجود ریاضی دایره رابطه شهودی و بلاواسطه او با حقیقت قائم و مستقل از ذهن ریاضی در ساختمان ریاضی ضروری است .

۲-۲- مبانی شهودگرایی ریاضیات :

شهودگرایی فلسفی ترین و با اهمیت ترین مکتب مبانی ریاضیات است . نقش تعقل و حدس فلسفی ریاضی دان نقش است اساسی و برخلاف دو مکتب مذکور در بلاشهودگرایی به کلی امکان ساختمان ریاضی را توسط یک " ماشین " بر مبنای ضوابط منطقی و صوری رد می کنند ، و ریاضیات را یک کنش فلسفی توسط موضوع مدرک می دانند و نتایج این کنش را کشف حقایق ، حقایقی که مستقل از اندیشه وجود دارند . و این را اصلی شهودگرایی توسط " براور " به صورت دو کنش اصلی به صورت بینش فلسفی عنوان شده اند . اولین کنش شهودگرا ، یا اولین بینش و کشف اوجه کلی ریاضیات را از زبان ریاضی و از زبان منطقی جدا می کند و در نتیجه معتقد است که ریاضیات شهودگرا در اصل یک کنش ذهنی و مساوی زبان است و این کنش ذهنی

مبتنی است بر تصویری از امتداد در زمان که توسط قوه حافظه در ذهن محفوظ می ماند (گنث دوم)، و این دوکنش حدی بنیانی از ریاضیات است که، ولو در بدو امر ریاضی دان از بیان آن قاصر است، تصویری است از چستی کل ریاضیات. به عبارت دیگر ریاضی دان شهودگرا قائل باین است که ریاضیات دارای ماهیتی است قائم که در لحظاتی بینش فلسفی و یا آنات اشراق در ذهن او متصور می شود و از این طریق است که یک موضوع مدرک محدود با ماهیتی قائم و نامتناهی مربوط می شود. بنابراین ریاضیات در اصل هم از محسوسات مجزا است و هم از روابط منطقی که مفاهیم و امکان بیان شده را مرتب می کنند. فلسفه ریاضی شهودگرا تشابه بنیانی با حکم اشراقی دارد و این امری است که نه تنها در اصول صادق است، بلکه در جزئیات ساختمان منطقی بیانی که موضوع مدرک پس از ادراک اشراقی از ماهیت کل به زبان می آید و عنوان می کند و در اصل این بیان بیانی تمثیلی است و ریاضی دان شهودگرا قائل باین است که بیان ریاضی تمثیلی است از حقیقت قائم بالذات.

برنامه عملی ساختمان ریاضی در میانی شهودگرا برای بار اول توسط خود "براور" عنوان شد و سپس "هی تینگ" یکی از پیروانش این کار را دنبال نمود و اخیراً "یکی از فلاسفه انگلیسی به نام "دانت" این برنامه را گسترش داده است. در اینجا وارد جزئیات این برنامه نمی شویم علی الخصوص که اخیراً "دومقاله در این زمینه چاپ شده است (بولتن شماره ۱۰ انجمن ریاضی). برنامه

شهودگرا از یک سلسله موجودات مجرد شروع می کند، مثلاً "از اعداد طبیعی، و نیازی برای قالب ریزی یک دستگاه قیاسی معین آن نمی بیند و مثلاً" برای شهودگرایان اصول متعارف "پشانو" صرفاً بیان نتایج بدیهی ایجاد اعداد طبیعی است، که بزعم آنها مبتنی بر حدس فلسفی از وجودشان است. میانی منطق شهودگرا قانون ارتقاع را، که از قوانین سه گانه حاکم بر منطق دوارژیسی و از اصول منطق برنامه منطق گرایان است) نفی می کند، یعنی:

$$\neg (\forall x (P(x) \vee \neg P(x)))$$

بنا بر این $\neg \neg A \neq A$ و به طور کلی شهودگرایان اثبات های غیر مستقیم را در ساختمان ریاضی به کار نمی برند. این نکته خود از نقطه نظر فلسفه ریاضی حائز اهمیت است. چون اگر شهودگرایان عملاً" توانسته باشند با افکار برخی از اصول منطق، ریاضیات را - ساختمان دهند، عملاً" نشان داده اند که فرایند اصلی منطق گرایان که ریاضیات را متاخرو مشتق از منطق می داند، صحیح نیست.

در تعریفی که منطق گرایان از عدد کرده اند نیز شهودگرایان اشکال اساسی می گیرند. چون بزعم شهودگرایان، تعریف ۲، ۳ و غیره تنها زمانی امکان دارد که ما مفهوم عدد را کسب کرده باشیم و نه اینکه توسط استقراء اعداد را تعریف کنیم. مثلاً منطق گرایان عدد ۴ را چنین تعریف می کنند:

$$2(P) \equiv (\exists x)(\exists y) [(P(x) \cdot P(y)) \cdot x \neq y \cdot (z)(P(z)) \supset z = x \vee z = y]$$

و چون شهودگرایان تجزیه ریاضیات را به منطق رد می کنند تعریف

- اعداد را از این طریق قوی که دلالت از ماهیت عددیکنندگی دانند
 لکن برای شهودگرایان اعداد حقیقی، که مبتنی بر کنش فلسفی
 ذهن است، در عمل از طریق دو قانون بدست می آیند:
- ۱- قانون گستره ها \mathcal{L}_M (SPREAD-LAW) قانونی است که سلسله
 محدودی از اعداد طبیعی را بدو قسمت " قابل قبول " و " غیر قابل
 قبول " تقسیم می کند.
 - ۲- قانون متمم \mathcal{T}_M (COMPLEMENTARY LAW) در هر مورد لازم یک
 شیئی معرف ریاضی را به سلسله محدودی از اعداد منسوب می کند.

۴-۲ - نتیجه گیری :

قطعا " نتوانسته ایم در این مختصر به نتایج قاطع در
 باره مسائل فلسفه ریاضی برسیم ، ولی این خود یک نتیجه فلسفی
 است . اینکه صریحا " نمی توانیم قبول کنیم که : " آیا ریاضیات
 یک نظام منطقی است قابل گسترش بر مبنای اصول و روابط منطقی ؟ "
 یا " آیا ریاضیات یک نظام موری است متشکل از احکام ریاضی که
 نهاد دارای صورت هستند و هیچ گونه بیانی از حقیقت نیستند و هر
 آینه اثبات سازگاری قسمتی از گزاره های موری را ارائه دهیم
 به نحوی به موجودیت آنها اشاره کرده ایم ؟ " و یا " آیا ریاضیات
 تمثیلی است از حقیقت قائم بالذات ؟ " کدام واقعا " صادق اند ،
 خود پیچیدگی فلسفه ریاضی را می رساند . ولی لا اقل نتوانسته ایم

عنوان کنیم که پاسخ ما به سؤال چستی ریاضیات پاسخ ساده‌ای نیست و مستلزم بررسی دقیقی از اصول حاکم بر تفکر استمان است .

" فرگه " اولین کسی بود که نیاز بررسی معرفت ریاضی را عنوان کرد و اولین کسی بود که نظام فلسفه ریاضی را تدوین نمود که پی از او " راسل " آنرا به صورت یک برنامه کامل درآورد . " هیلبرت " و " براور " نظام های متفاوتی را بنا کردند و نشان دادند که نمی‌توانند یک فلسفه ریاضی را حاکم بر ریاضیات دانست و شاید معانی نمایی و مبانی نهایی ریاضیات همواره به صورت سؤال باقی بماند ، لکن کنش ریاضی همواره یکی از ارکان مسلم تعقل بشری است خواهد ماند و مانند هر گونه تعقلی همواره با زمان تغییر خواهد کرد ، ولی ریاضیات شیوه‌ای دقیق ، زیبا و منظم ، برای کشف حقائق و بیان آن در رابطه متقابل با عناصر متشکله هر مقطع زمانی که تعقل در آن صورت بگیرد ، خواهد بود ، و الزاما " اندیشیدن و ریاضیات - همواره همراه خواهند بود .

۳- تاثیر نتایج ریاضی بر فلسفه :

قبلا" اشاره کردیم که یکی از مباحث فلسفه ریاضی بررسی نتایج فلسفی قفایای ریاضی است . در تاریخ فلسفه گزارا " به مواردی برمی‌خوریم که تفکر فلسفی تحت تاثیر مستقیم ریاضیات بوده است . مثلا" افلاطون از پنج شکل منظم هندسه اقلیدسی در

میان چستی ماده و بررسی ماده الموادهستی استفاده کرده است
 دنباله 2^{n-1} مبنای بیان تمثیلی کثرت النوار مجرّده در حکمت
 اشراقی است، و غیره. اخیراً "سه قضیه مهم در ریاضیات اثبات
 شده اند که تا شیرآنها بر اندیشه فلسفی می تواند گویای چند مسأله
 اصلی در وجود باشد. در این مختصر فرصت بررسی عمیق این سه قضیه
 را نداریم ولی شمه کوتاهی را بیان خواهیم کرد و بیشتر از این نقطه
 نظر که به رابطه متقابل فلسفه و ریاضی اشاره کرده باشیم.
 سه قضیه عبارتند از:

- ۱- اولین قضیه عدم تمامیت "گدل" : یک محمول وجود دارد که
 هیچ نظام کامل صحیح صوری برای آن وجود ندارد.
- ۲- قضیه "چرچ" : یک محمول وجود دارد به طوری که هیچ دستگاه صوری
 صحیحی را نمی توانیم در نظر بگیریم که شامل شیوه ای برای
 تصمیم گیری درباره آن محمول و نقیض آن باشد.
- ۳- قضیه "اسکولم" : هیچ دستگاه سازگار جزمی صوری وجود ندارد
 که بتواند اعداد طبیعی را به نحوی بیان کند.

متوجه می شویم که هر سه قضیه به نحوی به محدودیت تعقل اشاره
 می کنند. از قضیه "گدل" می توانیم نتیجه بگیریم که هیچ گاه
 انسان نمی تواند طبق یک برنامه مشخص (مثلاً یک نظام صوری)
 همواره احکام صادق و تنها احکام صادق را بیان کند. از قضیه
 "چرچ" نتیجه می گیریم که همواره مجموعه ای مسائل حل ناشدنی
 برای بشر وجود دارند، و از قضیه "اسکولم" نتیجه می گیریم که هیچ

انسانی قادر به بیان کامل اعداد طبیعی نخواهد بود. قسماً
چیت؟ و املاً محدودیت تعقل در بشر آ یا خود امری بدینی نیست؟
یک نتیجه ساده: تعقل مطلق ممنوع است ج و همواره برای انسان
مجهولات وجود خواهد داشت. البته ممکن است چنین نتیجه‌ای را
بدون درد داشتن قضایای مذکور بتوانیم عنوان کنیم، ولی
قدر مسلم این است که پراهین اقامه شده قبول عدم تعقل مطلق را
استوارتر می‌سازد و هر چند در علم المعرفة قائل باشیم که انسان
به عنوان یک جوهر اندیشمند قادر به تصور لایتناهی است ولی هیچ‌گاه
قادر به تعقل لایتناهی نخواهد بود توانست همه چیز را در وجود
علی الاطلاق بدانند.

حسین فیاضی