حسین ضیائی: مجله "الگوریتم" شماره ۲۲، ۱۳۵۸.

بحثی اجمالی پیرامون مسائل مبانی و فلسفه ریاضی

الف ـ مقدمه:

به طور کلی فلسفه ریاضی شامل تحقیقاتی در باره مفهوم ریاضی و بررسی مسائلی که مبانی ریاضیات را می‌سازند، و مبحثی است از فلسفه. ولی به دشواری می‌توان گفت که دقیقاً جزئیات مسائل مشمول فلسفه ریاضی چه چیزهائی هستند. تا این زمان، چه در زمان قدیم و عصر فلسفه کلاسیک و چه در دوران ما، کتاب کاملی نوشته نشده است که دربرگیرنده تمامی مطالبی باشد که به نحوی به فلسفه ریاضی مربوط می‌شوند. اما این فقدان یک کتاب مرجع کامل و شامل، خودگویای شمه‌ای از چگونگی تحقیق در فلسفه ریاضی است. مسائل فلسفه ریاضی هم داخل در علم ریاضیات (مخصوص مسائل مبانی ریاضی) هستند، و هم داخل در علم فلسفه. بنابراین چنانچه شخصی خواسته باشد وارد در بحث فلسفه ریاضی بشود، باید از طرفی به نحوه روش تحلیل فلسفی و از طرف دیگر به روش تحلیل ریاضی آگاهی و تسلط داشته باشد. در طی تاریخ، متفکران مهمی فکر خود را مبذول و معطوف به حل مسائلی داشته‌اند که می‌توان آنها را در زمره مسائل فلسفه ریاضی دانست؛ و نیز چون بسیاری از مسائل مبانی ریاضیات مسائل فلسفی

هستند، .هرگاه ریاضی دانی به این مسائل برداخته نتایج تحقیقاً وتفکراتش جنبه های فلسفی مهمی را نیزدربرداشته است. مثلاوقتی " اقلیدس " درباره ماهیت نقطه می اندیشدپاسخی راکه به سئوال " نقطه چیست ؟" می دهدپاسخی فلسفی است ؛ چون مربوط به مسائلی می شودکه درحوزه علم هستی شناسی قرار دارد. برای اینکه بتوانیم موضوع فلسفهٔ ریاضی وماهیت آن را به نحوکاملی بیان کنیم ناگزیر بایداول بکوشیم تا مسائل راکه به نظرمان مسائل فلسفهٔ ریاضی می آیندبرشماریم.

فلسفه همواره با سئوال آغازمیشود. درطی تاریخ، نظام های فلسفی متشکل بوده است ازمجموعهٔ پاسخهای افرادی که با این علم سروکارداشته اند. اکثرسئوال ها، ازهمان بدوشروع تفکرمنظمی که فلسفه نامیده شده است تاکنون به قوت خودباقی هستند، تنها پاسخها تغییرپذیرفته اندوکاملترشده اند. مثلاً سئوال " عددچیست ؟" ــ حداقل اززمان " فیثاغورث " تاامروزیکی ازسئوال های اصلی فلسفه ریاضی به شمارمی آید. جنبه های این سئوال : " آیا عددمفهوم وتصوری است کاملاً مجردازماده که وجودآن تنها درذهن متحقق می گردد ؟" و " آیا عددمنتزع ازماده است ولی دردنیای خارج ازذهن مصداق می یابد؟ " ، و " آیا عدددرجه ای است ازتجلی حقیقتی متعالی که والاترازذهن بشراست ؟" و " آیا عددصورتی است ساختهٔ ذهن بشر داخل درنظام بدیهی ویا موضوعی واصل متعارفی ، که آنهم ساخته ذهن است ؟ " . پاسخ به اینگونه سئوال ها درطی سالیان درازتاریخ

فلسفه وتاریخ ریاضیات همواره ذهن متفکران را به خودمشغول می‌داشته ودرضمن سازندهٔ نظریه‌های مکتب‌های مختلف مبانی ریاضیات بوده است. بااندک تاٌمل درماهیت این گونه‌سئوالها می توانیم نتیجه بگیریم که نه تنها دربارهٔ اکثرمفاهیم‌ریاضی بلکه دربارهٔ خودمفهوم ریاضی نیزمی توان ازاین قبیل سئوالات مطرح ساخت. قدرمسلم این است‌که می توانیم تعدادبیشماری پرسش فلسفی درباره ریاضی ومسائل جزئی ریاضیات مطرح کنیم ولی برای اینکه بتوانیم به نتیجه برسیم وبتوانیم حدود معینی رابرای پاسخ هایمان مشخص‌کنیم، بایداصول ومبانی سئوال هاراپیداکنیم ؛ واین خودمستلزم آن است‌که اصول نظریاتی رابنیان بگذاریم که‌سئوال های مختلف برآن متکی می توانند بود. به‌طورخلاصه اگرقائل به‌تعریف کلی ازفلسفه : که " تحقیق درباره ماهیت اشیاء به‌قدرطاقت بشر" است، باشیم ، وجود، حقیقت ، امتدادمقولاتی ورابطهٔ اشیاء ریاضی رادرارتباط با موضوع مدرک (مثلاً" خودریاضی دان) بایددرفلسفهٔ ریاضی مورد بررسی قراردهیم. البته دیدفلسفی مایقینا " درنحوهٔ تحلیلی که ازوجودوحقیقت اشیاء ریاضی انجام می دهیم تاثیرمی گذارد، ومثلاً" اگردیدکلی ماازشناخت دیدی اشراقی ، آرمان گرا یا واقع گراباشد، مسائلی راکه مربوط به‌شناخت اشیاء ریاضی می‌شوند به‌شیوهٔ خاص مبتنی‌بردیدکلی فلسفی بیان خواهیم کرد.

پس ازیک سوفلسفهٔ ریاضی تحقیقی است فلسفی ازریاضیات؛

اما ازسوی دیگر، چون فلاسفه همواره شیفته دوجنبه کلی ریاضیات یعنی نظام‌پردازی ودقت ساختمان قضایای ریاضی (مسلم بودن نتایج دستگاه‌های اصل متعارفی) بوده‌اند، نتایج ریاضیات همواره درخودبینش فلسفه وشیوه تحلیل فلسفی تاثیرزیادی گذاشته است البته خودمساله نظام پردازی درریاضیات دامنه وسیعی داردکه محتاج به توضیح نیست وروش اصل متعارفی که در ریاضیات تا این اندازه پیشرفته است، دارای مبانی فلسفی است ومنتج ازسئوالهائي استکه دراصل شناخت وسپس ازشناخت ریاضی مطرح شده است. ما نیزچنانچه بخواهیم به‌طورمنظم پیش رویم اولین مساله‌ای راکه باید طرح کنیم (واین مساله ایست که‌همواره درحیطه ریاضیات مطرح شده است) مساله بررسی ریاضیات ازنقطه نظرشناخت‌شناسی است؛ ودربدوشروع به چنین بررسی ای مساله ماتقدم بودن مفاهیم ومعرفت‌های ریاضی پیش می آید. جای تعجب نیست‌که اکثرفلاسفه وبخصوص "کانت" که این مساله رابه‌طورمنظم بررسی کرده بود، ریاضیات را معرفتی ماتقدم وازپیش موجودمی دانند. ولی اخیرا" برخی ازریاضی دانها که‌گرایشی به‌مطرح کردن سئوالات فلسفی درریاضی دارند، مثلا" "فرگه" و "راسل" سعی کرده اندکه باارائه دادن تحلیلات منطقی درباره مفاهیمی مانند مجموعه واعدادطبیعی ریاضیات را، به نحوی، داخل درقلمرومنطق بدانندومنطق راهم روابط بین صورتهای ساختمان پذیرفته درنظام های مختلف قلمدادکنند

(یعنی قائل به وجود مستقل ریاضی نیستند) . پس مساله معرفت ماتقدم ومعرفت ماتاءخروتجربی مساله ایست فلسفی هم دررابطه با مفهوم ریاضی بطورکلی وهم دررابطه با مفاهیم جزئی ریاضی .

سیرتکامل ریاضیات جدیدبخصوص با درنظرگرفتن جنبه تجرد ووابستگی آن به دانش مجموعه ها همراه با مسائلی بودکه به افلاطون گرائی موسوم هستند . درطی قرن نوزدهم ریاضی دانها در تنظیم قضایای حساب وآنالیز ، که برمبنای اصول متعارف بنا شده بود ، ودرراه استوارساختن قضایای آنالیزوحساب برمبنای نظریه اعدادطبیعی ازدیدگاه افلاطون گرائی کوششهائی مبذول داشتند . دراین موردکارهائی که " کانتور" درمجموعه ها انجام داد اصول این نظام پردازی درریاضیات راپی ریخت که جهتی به سمت تجرد هرچه بیشتردرریاضیات داشت وشامل فرضیات افلاطون گرایی بود . بحث درمساله افلاطون گرائی بالاگرفت وسه نظریه مختلف به میان گذاشته شد . حادترین این سه نظریه ، که با مخالفت با نظریه کلی افلاطون گرائی برخاست ، شهودگرائی استکه بانی آن " براور " ریاضی دان معروف هلندی بود . درمقابل این نظریه ، روش هیلبرت قرارگرفته استکه به نام صورت گرائی معروف شد ، ونظریه سوم منطق گرائی نام داردکه برپایه نظریات " فرگه " و " راسل " استوارگشته .

یکی ازمهم ترین مسائل فلسفه ریاضی سئوالی است درباره ارتباط ریاضیات باتجربه واین سئوالی استکه اززمانهای قدیم

مطرح شده است . بدیهی معنی که آیا ریاضی علمی است ماتقدم که ماسوای تجربه درمرحله اول ، وماسوای درک وتجربه موضوع مدرک درمرحله دوم تحقق می پذیردومنتظم می شود؟ یا اینکه آیا ریاضی علمی است برمبنای تجربه موضوع مدرک (چه درذهن وچه درحس و یا هردو) ؟ البته پاسخ کاملی رانمی توانیم ارائه‌دهیم که بتوان آنرا اثبات کردواحیانا " آنرا بعنوان فرضیه‌ای قبول نمود ولی بررسی این مساله ازدیدگاه های مختلف فلسفی ومبانی ریاضی نمایانگرجوانب این مساله است وما را با نحوه تفکروشیوه‌های مختلف تحلیلی فلسفی - ریاضی درجهت بررسی این مساله آشنا می سازد. بایدمتذکرشدکه درریاضیات عملی ودرعلوم عملی به‌طور کلی چنین سئوالهای انتزاعی درسازگاری ونتیجه گیری الزاما " راهی ندارد. ومثلاً" برای یک فیزیک دان که ازریاضیات در - اندازه گیری پدیده‌های طبیعی استفاده می کندسئوال اینکه‌آیا $a=b$ و $b=c$ پس $a=c$ امری است بدیهی ویا اینکه اصلاً" موضع بدیهیات دریک نظام اصل متعارفی وارتباط آن با اصول موضوعه چیست ، ممکن است سئوال بی موردی باشد. وشاید بعضی ریاضی دانها قائل باین باشندکه ریاضیات بدون بررسی سئوالها ومسائل مبانی وفلسفی به‌کارخودادامه‌خواهدداد وسازگاری خودرا ازدست نخواهدداد ، ومطرح کردن یا مطرح نکردن سئوالات فلسفی پیرامون چیستی وحقیقت ریاضی ربطی به " پیشرفت " ریاضی نخواهدداشت . البته موضع فلسفی وموضع ریاضی دانهائی مانند

فرگه ، کانتور، براور،هیلبرت ، وغیره ، از یک سووفلاسفه به طور کلی این است که " پیشرفت " درریاضیات محض را با کاربردویا عدم کاربردمطالب مربوط نیست .

مساله حقیقت درریاضیات نیز، که یکی ازاساسی ترین مسائل فلسفی ـ ریاضی است ازنقطه نظربرخی ریاضی دانان صرفا " دررابطه با استحکام اثبات هائی ازصدق گزاره های ریاضی عنوان می شود، این گونه ریاضی دانهاضمن اظهاراینکه ریاضی علم نیست معتقدندکه حقیقت ریاضی صرفا " بیانی است ازشیوه های اثبات انتخاب شده درحل مسائل ، ولی اکثرریاضی دانهائی که قائل به گویابودن موضع فلسفی ـ ریاضی هستند اعتقاددارندکه ریاضی علمی است دارای موضوع خاص ونتایج حقیقی فراگیرودارای ماهیتی مشخص که والاتروعمیق تراست ازصرفا " روابط منطقی بین گزاره های صوری ، یعنی حقیقت ریاضی را صرفا " یک حقیقتی منطقی نمی دانند.

ازبیان مقدمه کوتاهی که ذکرشدنتیجه می گیریم که برای بررسی مطالب فلسفه ریاضی احتیاج داریم که موضع واصول نظریات مختلف ومکتب های فلسفه ومبانی ریاضی بایدمشخص شود.

۲- مکتب های مبانی ریاضی :

۲-۱- مبانی منطق گرای ریاضیات :

" لایبنیتز " فیلسوف شهیرآلمانی که یکی از بنیان گزاران منطق ریاضی بشمار می رود مصرا " قائل باین بود که نظام های ریاضی می توانندقالب خوبی برای مبانی تفکر باشند. این امربدیهی پیروان زیادی پیداکرد. ولی نظریه دیگر او که حقائق ریاضی ومنطق هردورا مبتنی براصل تناقض $(\forall x \neg (P(x) \wedge \neg P(x)))$ می دانست ، هرچندیکی ازاصول منطق گرایی است ، در دیگرمکتب های مبانی ریاضی پیروان چندانی نیافت . این نقطه نظرمنجربه این می شودکه کلیه حقائق ریاضی ومنطق درنهایت امرقابل به تجزیه به گزاره های یکسان هستند ، واین عمل تجزیه شامل تعدادمحدودی ازمراحل است . مثلا" ماهرآینه مواجه با یک بیان ریاضی $\phi(x_i)$ شدیم الزاما" خواهیم توانست پس از مراحلی محدود $\phi\ \{\alpha_n : |n| < \infty\}$ راتجزیه کنیم به یک گزاره یکسان یایک همان گوئی منطقی ، مثلا" گزارهٔ مرکبی مانند $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ که همواره دارای ارزش یکسان است ، بدون توجه به ارزش های جداگانه اجزاء متشکله آن (p, q, r) . به عبارت دیگراین نظریه قائل باین است که تمام ریاضیات رامی توان برمبنای تعدادی گزاره صادق منطقی برمبنای اصول منطق (یعنی ماسوای تجربه ذهنی مرحله به

مرحله ازاثبات وساختمان ریاضی توسط ریاضی دان) بنا نمود.

منطق گرایان با کوشش فراوان سعی کردنداین برنامه را در ریاضیات به مرحله عمل درآورندوریاضیات را برمبنای روابط اصلی منطقی وگزاره‌های همواره صادق بنا نمایند. البته نظریه گزاره‌های یکسان مانندنظریهٔ گزاره‌های تحلیلی "کانت" زیاده ازحدساده است که بتوان کلیه ریاضیات را برمبنای آن بنا نمود، وانتقاداصلی برمنطق گرایان این است که خوداصل تناقض یک گزاره یکسان وبه اصطلاح "کانت" یک گزاره ماتقدم تحلیلی است، علی الخصوص که اصول منتج ازاصل تناقض $A\Rightarrow\neg\neg A$ و $\neg\neg A\Rightarrow A$ ضروری، (به معنای اصلی فلسفی ضرورت) نیستند، چون درنظام های منطقی چندارزشی امکان صادق نبودن اصولی مانند $\neg\neg A\Rightarrow A$ را ثابت کرده اند. به عبارت ساده الزاماً" درساختمان ریاضیات نمی توانیم شهودوتعقل بلاواسطه ریاضی دان راکلاً" انکارکنیم.

علی ایّ حال موضع منطق گرائی توسط "فرگه"، "راسل" وپیروان آنها به صورت یک برنامه عملی درآمد." فرگه" توانست به جای مفهوم گزاره‌ی یکسان ـ که دربدوامرچیزی جزنشان دادن شمول محمول درموضوع $(S\subset P\vee Q)$ نمی بود ـ مفهومی منسجم تروگویاترتحت عنوان تحلیلی به کاربرد (این مفهوم برابر است باکاربرددقیق نوعی خاصی ازاستلزام : گزاره‌هائی مورد قبول دراصول هستندکه بتوان آنها راصرفا " ازقوانین اصولی

منطق وتعاریف مربوط به آنها استنتاج نمود.) ونیز "فرگه" موفق شدکه ،بزعم خودش ، تحلیل وتجزیه حقائق ریاضی را ازطریق اقامه اثبات برای تحلیلی بودن گزاره انجام دهد. ازاین طریق " فرگه " ومنطق گرایان توانستندنشان بدهندکه علم حساب (حداقل درمرتبه اول) دارای خاصیت خاص تحلیلی است که خود مبتنی است برقوانین اصلی منطق . یعنی مثلاً" $P_j(x)$ رابتوان درنهایت امربه P که گزاره ای همسان وتحلیلی ویکی ازقوانین کلی منطق است تبدیل نمود (بااستفاده از ۱ ـ تبدیل یک نظام علامتی بدیگری ؛ ۲ ـ تنها استفاده ازضوابط مسجل ومفروض نپنداشتن گزاره هائی که تثبیت نشده اند):

$$P_i(x) \, , \, \beta_i \ : \ \sum_{i=1}^{m} P_i(x)\beta_i \Rightarrow P$$

تحلیلی بودن علم حساب ، چنانچه منطق گرایان نشان داده اند ، بریک پیش فرضی بسیارمهم استواراست : قوانین کلی منطق بدیهی هستند. پس آغازساختمان ریاضی به نحوی بافطرت انسان آمیخته است .چون امربدیهی بلاواسطه ودفعه مدرک است وتعقل فطری انسان درچنین تحرک ادراکی دخیل است وچون فطریات ازجمله اموری هستندکه وجودآنها قائم برادله مابعدالطبیعی است (مثلاً" نقش واهب الصوردروجودفطریات) ، پس ساختمان ریاضی نمیتواندصددرصدامری مکانیکی ـ منطقی باشد. این نکته مهم رامنطق گرایان بکلی نادیده گرفته اندواصولاً" اشاره ای بچگونگی فطری بودن قوانین کلی منطق نکرده اند.

دراثبات تحلیلی بودن علم حساب ، منطق گرایان ، محتاج به یک سلسله تبدیل علائم اند. درمرحله اول تبدیل علائم الفاظ (ودرحالت ترکیبی احکام) نمادین شده صرفا" منطقی هستند. مثلا" علائم متغییرات گزاره‌ها $(p, q, r, s, \ldots)$ ، وعلامت عطف (۸)، وعلامت فصل (۷) ، و علامت سلب ( ) وغیره. ولی احکام نمادین شده درمراحل نهائی الزاما" شامل علائمی خواهند بودکه برحسب ظاهرمنطقی بودن آنها ضروری نیست ، و تنها پس از اقامه براهین منطقی بودن آنها تثبیت می‌شود. پس دریکی از مراحل اثبات ـ ازمقدمات تا نتیجه ـ تبدیل علائم منطقی صرف به علائم دیگرصورت می‌گیرد ، دراین مرحله مهم تعریف وحدمنطقی نقش مهمی راایفا می کند. ودراین جا اساسی ترین تفاوت داخلی در نظام مبانی منطق گرای ریاضیات وجوددارد. نظریات " فرگه " درباره تعریف وحدمنطقی نظریه ایست واقع گرا یعنی حدمنطقی را قولی که دلالت برماهیت بکندمی داندوپس قائل به ماهیت قاسل اشاره ازبرای اشیاء ریاضی معرف ، ونظریه " راسل " نظریه‌ای است نام گرا (NOMINALIST) یعنی تعریف راصرفا "وسیله‌ای برای تبدیل یک سری علائم به علائم دیگرمی داند. برای " راسل " تعریف صرفا " بیانی است ازترکیب تازه‌ای ازعلائم برمبنای ترکیبی ازپیش شناخته شده وبنابراین دراصل تعریف راقولی که دلالت بر چیزی بکندنمی داند ، بلکه صرفا " قابلیت ایجادتسهیل درمراحل اثبات رادارد. برمبنای چنین نظریه‌ای تعریف نوعی اختصاردر

بیان مطالب دانسته شده است وبرای " راسل " تعریف یک عدد
خاصی (مثلاً" وقتی می گوئیم تنها عددی که ...)، یا یک طبقه از
اعداد (مثلاً" طبقهٔ اعداد صحیح تقسیم پذیر به دو) بیانی است
ازچیزهائی صرفاً "منطقی غیرمادی وذهنی. نظر" راسل " دراین
موردپیروان زیادی نداردوموضع حادی ازمنطق گرائی است . ولی
موضع " فرگه " که ازبینش فلسفی عمیق تردلالت می کندپیروان
بیشتری دارد." فرگه" معتقداست که اعداداشیاء منطقی هستند و
هدف فلسفهٔ ریاضی این است که آنها را مشخص کند. البته ، بزعم
" فرگه" تعریف عددمترادف باخلق آنها نیست بلکه تحدیدچیزی
است که استقلال وجودی دارد. برای " فرگه" تعریف عدداز طریق
متمایزکردن دریک مرحله ساختمان ریاضی کافی نیست ونیزنمیتوان
عددرا به عنوان یک اصل موضوعه تعریف کرد. بایدعددرا ازطریق
تعریف" مشخص " نمودوبایدتعریف قولی که دلالت برماهیت میکند
باشد، پس بایدوجودعدداز طریق تعریف بیان شود. تعریف " فرگه"
ازعددبسیارمشهورومفصل است ودراین مختصرمجالی برای بیان آن
رانداریم ولی اصل حاکم برنظریه" فرگه" چنین است :
بیان : " تابع $\Phi(\xi)$ دارای بُرد ارزشهای یکسان باتابع
$\Psi(\xi)$ است" را مترادف با بیان " تابع $\Phi(\xi)$ وتابع
$\Psi(\xi)$ درازای احکام همسان ارزش برابر دارند" ،میداند
تابع $\Phi(\xi)$ چنین است که ξ ها توسط اشیاء ریاضی مورد
نظر" پُر" می شودو $\Phi(\xi)$ را" فرگه" یک مفهوم می دانداگر

درازای تبدیل اشیاء ریاضی به $\mathcal{G}$ حکم بدست آمده یک گزاره صادق (یاکاذب) باشد.

دربالامتذکرشدیم که منطق گرایان دربرنامه ساختمان ریاضی برمبنای اصول کلی ریاضی ازگزاره‌های همواره صادق استفاده می کنند. به عبارت دیگرگزاره‌های همواره صادق ... همان گوشی های منطقی دربرنامه منطق گرایان به عنوان مسلم درادامه براهین استفاده می شود. این جنس گزاره‌ها از طریق بررسی توابع صدقی (TRUTH FUNCTION) بدست میآید. مثلا تابع صدقی $f(p_1, p_2, \dots, p_m)$ مشتقا" ضروری است اگرونهایتا اگرارزش کلی آن درازای ارزشهای متفاوت $p_1, p_2, \dots, p_m$ همواره صدق باشد. مثلا" گزاره مرکب $\neg(p \wedge \neg p)$ همواره صادق است ویاگزاره $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ همواره صادق است (چه p و q صادق باشندوچه کاذب). توابع صدقی را مبنای ثوابت منطقی (LOGICAL CONSTANTS) پنج گانه: رابطه عطف (۸)، رابطه فصل (۷)، رابطه لزوم ($\Rightarrow$)، رابطه نفی ($\neg$)، رابطه لزوم دوطرفه ($\Leftrightarrow$)، می شناسیم وبیان می کنیم. مثلا" تابع صدقی عطف، که برای دومتغیردارای چهارحالت است:

(T علامت صدق ، F علامت کذب)

$$\wedge(p, q) \begin{cases} \wedge(T, T) = T \\ \wedge(T, F) = F \\ \wedge(F, T) = F \\ \wedge(F, F) = F \end{cases}$$

تنها دریک موردمنطقا " ضروری است . به عبارت دیگردرساختما ن ریاضی ما ازتابع $\wedge(p_1, p_2, \dots, p_n)$ به عنوان یک مقدمه مسلم تنها درموردی می توانیم استفاده کنیم که کلیه p ها صادق باشند. مثال دیگرتابع صدقی فصل است (برای دومتغیر)

$$V(P, q) \begin{cases} V(T, T) = T \\ V(T, F) = T \\ V(F, T) = T \\ V(F, F) = F \end{cases}$$

متوجه می شویم که ازچنین تابعی درموارد متعددتری می توانیم به عنوان یک تابع منطقا " ضروری استفاده کنیم ، یعنی $V(p_1, p_2, \dots, p_n) = T$ اگر $\exists p_k : p_k = T$ (یعنی تنها یک گزاره صادق). ارزش توابع منطقا " ضروری دربرنامه منطق گرائی کاملا" مشهوداست ، وچون طبقه توابع صدقی همان یا همواره صادق کاملا" تعریف شده است ، وچون صرفا " ازطریق یک شیوه مکانیکی می توان توابع صدقی همواره صادق را شناخته چنین توابعی تماما " به عنوان مقدمات مسلم دربرنامه منطق گرائی وساختمان ریاضی برمبنای اصول منطق استفاده می شوند. ولی درساختمان ریاضی منطق گرایان احتیاج به مقدمات دیگری دارند ودراینجاست که ضعف برنامه آنها دیده می شود. خودشیوه ساختمانی مورداستفاده " راسل " درکتاب معروفش " اصول ریاضیات " شیوه ساده ای است :

درابتدا ازمجموعه‌ای ، مثلاً S ، که علم بدان داریم شروع میکنیم دربدوامر شواهدچنین اقتضا می کنندکه S را قبول کنیم ، ولی با مشکلات زیرروبرومی شویم : ۱ ـ ادعاهای شناخت مربوط به S را بسهولت نمی توانیم قبول کنیم (مثلاً آیا صحیح است که

$$(\forall a, \forall b : a, b \in S) ؟$$

۲ـ مسائل حل ناشده در S وجوددارند (مثلاً آیا صحیح است که

$$(\forall a, a \in S \mid \exists e \mid e \in S \Rightarrow a \cdot e = e \cdot a) ؟$$

۳ـ درباره وجودعناصر . نمیتوانیم تصمیم قاطع بگیریم (مثلا آیا صحیح است که

$$(\forall a, a \in S \mid \exists b, b \in S \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a = e) ؟$$

شیوه ساختمانی موردنظر " راسل " درچنین مواردی S را برمبنای مجموعه ازپیش بیان شده درنظرمی گیردو " بنا " می کند (مثلاً S رادرمقابل یک گروه آبلی G بیان می کند). ولی اشکال عمده " راسل " دروجودبی نهایت است . آیا بایدوجودبی نهایت راامری بدیهی بدانیم ؟ وموضع آنراهماننددیگراصول بدیهی منطق مانندعطف ، فصل ، اندخال ، اندراج ، وغیره؟ ویا اینکه بایدوجودبی نهایت رابعنوان یک اصل موضوعه درساختمان ریاضیات بپذیریم ؟. " راسل " هردوکارراکرد. درچاپ اول "اصول ریاضیات" وجودبی نهایت رابعنوان یک اصل بدیهی یا متعارف قبول کردودرچاپ دوم همان کتاب وجودبی نهایت رابه عنوان یک اصل موضوعه پذیرفت . درهردومورد منطق گرائی با اشکال روبروست ، چه اگر

ریاضیات تماماً متاخر بر منطق ومنتج از آن است باید درساختمان ریاضی درهیچ مرحله تعقل شهودی موضوع مدرک دخالتی نداشته باشد. ولی چگونه می توان بی نهایت را صرفاً " سرمبنای منطق شناخت. واصولاً " استفاده ، بدون دقت وتعمق کافی ، ازمفهوم بی نهایت بالفعل درساختمان ریاضی توسط " راسل " و" فرگه " ضعفی اساسی درفلسفه ریاضی منطق گراست.

۲-۲- مبانی صورت گرای ریاضیات :

قبلاً" متذکرشدیم که افکاروآراء فلسفی " لایبنیتز " درباره ساختمان ریاضی وعلی الخصوص مفهوم گزاره های یکسان او باعث تدوین وگسترش تفکرفلسفی درریاضیات شدکه آنرا بنام منطق گرایی می شناسیم . افکارفلسفی " کانت " باعث هدایت آراء فلسفی شدکه دراین قرن بدوصورت درباره فلسفهٔ ریاضی تفکرمی کنند: " صورت گرایی " و " شهودگرایی ". برای " کانت" نقش منطق درریاضیات همان نقشی است که دردیگرعلوم ، وبه عبارت دیگردردانستن ، دارد. ازنقطه نظر" کانت " هرچندقضایا ونتایج ریاضی مبتنی براصول متعارف توسط اصول منطق بدست می آیند، اصول متعارف وقضایای ریاضی خوداصول منطق نیستند و اصلاً" تجلی خاصی ازاصول منطق نیزنمی توانندباشند.

" هیلبرت " ریاضی دان معروف باالهام ازتفکرات فلسفی "کانت"

برنامه‌ای را درساختمان وفلسفه ریاضی تدوین کردکه به " صورت گرایی " موسوم شد. به‌گفته " هیلبرت " (واین نکته مخالف اصول منطق گرایی است) چیزی که دراستنتاج های منطقی واحکام مرکب منطق مفروض است ازپیش درمفروضات اولیه تعقل داده شده . یعنی ریاضی دان درذهن خوداز پیش اشیاء غیرمنطقی معینی را ، که ازطریق حدس فلسفي براي اوآشکاراست ، بلاواسطه کسب می‌نماید و این اشیاء هستندکه اصول تفکرریاضی اورامی سازند. یعنی برخلاف منطق گرایان درریاضیات راهستی براصول مسلم منطق قابل ساخته شدن می دانند، صورت گرایان اصول اولیه ساختمان ریاضی را دروجوداشیاء ضروری غیرمنطقی می دانند. دراین نوع ریاضیات تناقض‌های بنیانی وجودندارد، تناقض‌هائی که مبتنی برمفهوم بی نهایت بالفعل پایه‌های منطق گرایی رامتزلزل می کرد، چون مفهوم بی نهایت بالفعل هیچ گونه رسم ویاتحدیدی ازاشیاء متعین نیست وبنابراین دربرنامه صورت‌گرایی موردنظرنمی باشد. تفاوت بین " هیلبرت " و " براور " (بانی مکتب شهودگرایی) برسر ریاضیات ترانسفینیی ازنوع " کانتور " است : " هیلبرت " پا را فراترازریاضیات ترانسفینیی نمی گذاردولی " براور " می کوشد تابه‌نحوی بیانی ازبی نهایت راارائه دهد. " هیلبرت " مفهوم واقعی ریاضیات محدودراازمفهوم آرمانی ریاضیات ترانسفینیی متمایزمی سازد، بنابراین می کوشدتابه‌نحوی اثباتی ازسازگاری دستگاهی متشکل ازریاضیات محدودبه‌انضمام ریاضیات ترانسفینیی

را ارائه دهد. وبرنامه " هیلبرت " مبتنی بردوفرایند است :

۱- ریاضیات شامل ترسیمی ازاشیاء و ساختمانهای متعینی است ،

۲- انضمام عناصرآرمانی به یک قضیه ریاضی مستلزم اثبات سازگاری دستگاه ریاضی موردنظراست واینجاست که به تعریف کلی ازصورت گرایی می توانیم اشاره کنیم : ریاضیات علم دستگاههای صوری است . یعنی ، وبرخلاف منطق گرایی ، ریاضیات قدم به قدم توسط اثبات سازگاری دستگاههای صوری ساخته می شود ، ویک نظام کلی منطقی غیرمرتبط با موضوع مدرک نیست ، وهمواره رابطه مدرک ومدرک درساختمان متدخل است .

برنامه " هیلبرت " ، چنانچه ذکرکردیم ، دراثبات سازگاری نظام های صوری خلاصه می شود . البته اثبات اینکه یک دستگاه متشکل ازگزاره های مختلف که خودبدینمعنی است که نشان داده شودکه هیچ دوگزاره متناقض وجودندارد ، کارساده ای نیست .چون این کارمستلزم این است که کلیه گزاره ها بررسی شوندوتنها در موردنظام هائی که تعدادگزاره ها محدودوقابل شمارش هستند امکان پذیراست . این برنامه (درذیل رئوس آنرا ذکرخواهیم کرد) برمبنای دوشیوه اثبات : مستقیم وغیرمستقیم ، استوارگشته است . دربعضی ازمواردمی توان نشان دادکه گزاره های متناقض الزاما " ، بخاطررابطه بین اصول متعارف ، تعاریف واصول موضوعه ، استنتاج نمی شوند ، ودرمواردیگربافرض " مدل " های

ریاضی عدم تناقض را می توان نشان داد. به‌طور خلاصه صورت‌گرایان می کوشند: ۱ ـ اشیاء دستگاه صوری را درازای اشیاء متعین مشخص کنند، ۲ ـ اصول موضوعه دستگاه صوری را در رابطه با اشیاء متعینی برمبنای خودرابطه مشخص کنند، ۳ـ نشان دهندکه به خاطر ۱ و ۲ هر استنتاجی که داخل نظام صوری انجام می شود الزاما" به تناقض منجرنخواهدشد. ۱،۲و۳ گریزی است درمواردی که شمارش گزاره ها امکان پذیرنیست.

دستگاه صوری راچنانچه درذیل آمده تعریف می کنند. اشاره می کنیم که نقش اشیاء متعین درچنین دستگاه هائی نقش اساسی است واستفاده ازآن نه تنها درفلسفه ریاضی که صورت‌گرائی را می پذیرد عنوان شده بلکه نفی وجودضوابط متشکله دستگاه های صوری کاربردفراوانی درریاضیات معمولی نیزدارد.

عناصرمتشکله دستگاه‌های صوری عبارتنداز:

۱ـ اصطلاحات فنی یا جمله ها (TERMS) :

الف ـ داده‌های متعین (TOKENS) . عبارتنداز اشیاء متعین مختلف. مثلا" علائم روی کاغذ، سنگ ریزه، وهرگونه شیئی متعین دیگر.

ب ـ اعمال (OPERATIONS) . ضوابط وضروب مختلف برای تشکیل اصطلاحات تازه.

ج ـ ضوابط تصویر (RULES OF FORMATION). ضوابط ساختمان اصطلاحات تازه. مثلا" :

$$\exists R : \{R_i\},\quad \{x_i\}, \alpha : R\alpha X \Rightarrow x_1 \in R_1, x_2 \in R_2, \ldots$$

۲ـ گزاره‌های مقدماتی (ELEMENTARY PROPOSITIONS)

احصاء حملیات گوناگون(یعنی X و Y است ، وغیره

$(p_i = x_i \in R_i$

۳ـ قضایای مقدماتی (ELEMENTARY THEOREMS)

الف ـ اصول متعارف . یعنی گزاره‌های مقدماتی که علی‌الاطلاق هستند.

ب ـ ضوابط شیوه‌های استنتاج (RULES OF PROCEDURE)

اگر p_1 و p_2 و ... و p_m قضایای مقدماتی هستند، مشروط به‌شرط S_i و اگر Q یک گزاره مقدماتی است دررابطه P_i به p_1 و p_2 و ... و p_m ،پس Q صادق است تذکرمی دهیم که کلیه اشکال قیاسی منطق یک چنین صورتی را دارند.

برای اینکه فرضا " درباره یک شیئی ریاضی بتوان تصمیم گرفت که آیا داخل دریک دستگاه صوری هست یا نه بایدسلسله مراحل تصمیم گیری محدودباشد. به‌عبارت دیگر" محدود" بودن دستگاه صوری یکی ازشروط اصلی برنامه صورت‌گرایی است موفقیت " هیلبرت" درقالب ریزی (FORMALIZATION) حساب مرتبه اول نقطه اوج مبانی صورت‌گرا بشمار میآید، ولی اثبات قضیه عدم تمامیت (INCOMPLETENESS THEOREM) توسط " گدل " ضربه ای بنیانی به‌پیروان مکتب " هیلبرت " واردکردوسئوالهای اساسی

فلسفی را درمورد ریاضیات وعلی الخصوص درمورد ریاضیات به عنوان علم دستگاه های صوری وریاضیات به عنوان یک دستگاه منطقی ، عنوان نمود. از نقطه نظر مبانی فلسفی ریاضیات این نکته حائز فراوان است چون می توانیم با قاطعیت بگوئیم که تنها قالب ریزی نظام پردازی ، اصل متعارفی کردن واصول منطق را اصل قرارداد ن برای ساختمان ریاضی کافی نیست وهمواره وجود ریاضی دان ورابطه شهودی وبلاواسطه او با حقیقت قائم ومستقل از ذهن ریاضی در ساختمان ریاضی ضروری است .

۲-۲- مبانی شهودگرای ریاضیات :

شهودگرایی فلسفی ترین وبا اهمیت ترین مکتب مبانی ریاضیات است . نقش تعقل وحدس فلسفی ریاضی دان نقشی اساسی وبرخلاف دومکتب مذکور دربالا شهودگرایان به کلی امکان ساختمان ریاضی را توسط یک " ماشین " برمبنای ضوابط منطقی و صوری ردمی کنند ، وریاضیات را یک کنش فلسفی توسط موضوع مدرک می دانندونتایج این کنش را کشف حقایق ، حقایقی که مستقل از اندیشه وجوددارند. واینرا اصلی شهودگرایی توسط " براور" به صورت دوکنش اصلی به صورت بینش فلسفی عنوان شده اند. اولین کنش شهودگرا ، یا اولین بینش وکشف او به کلی ریاضیات را از زبان ریاضی واززبان منطقی جدا می کندودرنتیجه معتقداست که ریاضیات شهودگرا دراصل یک کنش ذهنی وماسوای زبان است واین کنش ذهنی

مبتنی است برتصوری از امتداددرزمان که توسط قوه حافظه درذهن محفوظ می ماند (کنش دوم)، و این دوکنش حدس بنیانی ازریاضیات است که، ولودربدوامرریاضی دانان ازبیان آن قاصراست، تصوری است ازچیستی کل ریاضیات . به عبارت دیگرریاضی دانان شهودگرا قائل باین است که ریاضیات دارای ماهیتی است قائم که درلحظات بینش فلسفی ویاآنات اشراق درذهن اومتصورمی شودوازاین طریق است که یک موضوع مدرک محدودبا ماهیتی قائم ونامتناهی مربوط می شود. بنابراین ریاضیات دراصل هم ازمحسوسات مجزااست و هم ازروابط منطقی که مفاهیم وامکان بیان شده رامرتبط می کنند. فلسفه ٔ ریاضی شهودگراتشابه بنیانی باحکم اشراقی داردواین امری است که نه تنها دراصول صادق است ، بلکه درجزئیات ساختمان منطقی بیانی که موضوع مدرک پس ازادراک اشراقی از ماهیت کل به زبان میآوردوعنوان می کندودراصل این بیان بیانی تمثیلی است وریاضی دانان شهودگرا قائل باین است که بیان ریاضی تمثیلی است ازحقیقت قائم بالذات .

برنامه عملی ساختمان ریاضی درمبانی شهودگرابرای باراول توسط خود" براور" عنوان شدوسپس" هی تینگ " یکی ازپیروانش این کاررادنبال نمودواخیرا " یکی ازفلاسفه ٔ انگلیسی به نام " دامت " این برنامه راگسترش داده است دراینجا واردجزئیات این برنامه نمی شویم علی الخصوص که اخیرا " دومقاله دراین زمینه چاپ شده است (بولتن شماره ۱۰ انجمن ریاضی). برنامه

شهودگرا ازیک سلسله موجودات مجردشروع می کند، مثلاً از اعداد طبیعی، ونیازی برای قالب ریزی یک دستگاه قیاسی معین آن نمی بیندومثلاً برای شهودگرایان اصول متعارف "پئانو" صرفاً بیان نتائج بدیهی ایجاد اعدادطبیعی است، که بزعم آنهامبتنی برحدس فلسفی ازوجودشان است. مبانی منطق شهودگرا قانون ارتفاع را، که ازقوانین سه گانه حاکم برمنطق دوارزشی وازاصول منطق برنامه منطق گرایان است، نفی می کند، یعنی :

$$\neg(\forall x \ (P(x) \vee \neg P(x))$$

بنابراین $\neg\neg A \neq A$ وبه‌طورکلی شهودگرایان اثبات‌های غیرمستقیم رادرساختمان ریاضی به‌کارنمی برند. این نکته خود ازنقطه نظرفلسفه ریاضی حائزاهمیت است. چون اگرشهودگرایان عملاً توانسته باشندبا افکاربرخی ازاصول منطق، ریاضیات را ساختمان دهند، عملاً نشان داده اندکه فراینداملی منطق گرایا که ریاضیات رامتاخرومشتق ازمنطق می دانند، صحیح نیست.

درتعریفی که منطق گرایان ازعددکرده‌اندنیزشهودگرایان اشکال اساسی می گیرند. چون بزعم شهودگرایان، تعریف ۲، ۳ و غیره تنها زمانی امکان داردکه مامفهوم عددرااکسب کرده باشیم و نه اینکه توسط استقراء اعدادراتعریف کنیم. مثلاً منطق گرایان عدد۲ راچنین تعریف می کنند:

$$2(P) \equiv (\exists x)(\exists Y)\left[(P(x) \cdot P(y) \dot{:} x \neq y \cdot (z)\,(P(z)) \supset . \, Z = X\right.$$

$$\left. \mathcal{Y}\right)$$

وچون شهودگرایان تجزیه ریاضیات رابه منطق ردمی کنندتعریف

اعداد را از این طریق قولی که دلالت از ماهیت عددبکندنمی دانند لکن برای شهودگرایان اعداد حقیقی، که مبتنی برکنش فلسفی ذهن است، درعمل از طریق دوقانون بدست می آیند:

۱- قانون گستره ها Λ_M (SPREAD-LAW) قانونی است که سلسله محدودی از اعداد طبیعی را بدو قسمت "قابل قبول" و "غیرقابل قبول" تقسیم می کند.

۲- قانون متمم T_M (COMPLEMENTARY LAW) درهرموردلازم یک شیئی معرف ریاضی را به سلسله محدودی از اعداد منسوب می کند.

۲-۴ - نتیجه گیری :

قطعا" نتوانسته ایم در این مختصر به نتایج قاطع در باره مسائل فلسفهٔ ریاضی برسیم ، ولی این خودیک نتیجه فلسفی است . اینکه صریحا" نمی توانیم قبول کنیم که :" آیا ریاضیات یک نظام منطقی است قابل گسترش برمبنای اصول وروابط منطق ؟ " یا " آیا ریاضیات یک نظام صوری است متشکل از احکام ریاضی که تنها دارای صورت هستندوهیچ گونه بیانی از حقیقت نیستندوهر آینه اثبات سازگاری قسمتی ازگزاره های صوری را ارائه دهیم به نحوی به موجودیت آنها اشاره کرده ایم ؟" ویا " آیا ریاضیات تمثیلی است از حقیقت قائم بالذات ؟ " کدام واقعا" صادق اند، خودپیچیدگی فلسفه ریاضی را می رساند. ولی لااقل توانسته ایم

عنوان کنیم که پاسخ ما به سئوال چیستی ریاضیات پاسخ ساده‌ای نیست و مستلزم بررسی دقیقی از اصول حاکم بر تفکرات‌مان است.

"فرگه" اولین کسی بود که نیاز به بررسی معرفت ریاضی را عنوان کرد و اولین کسی بود که نظام فلسفهٔ ریاضی را تدوین نمود که پس از او "راسل" آنرا به صورت یک برنامهٔ کامل درآورد. "هیلبرت" و "براور" نظام های متفاوتی را بنا کردند و نشان دادند که نمی‌توان یک فلسفه ریاضی را حاکم بر ریاضیات دانست و شاید معانی نهائی و مبانی نهائی ریاضیات همواره به صورت سئوال باقی بماند، لکن کنش ریاضی همواره یکی از ارکان مسلم تعقل بشر باقی‌خواهد ماند و مانند هرگونه تعقلی همواره با زمان تغییر خواهد کرد، ولی ریاضیات شیوه‌ای دقیق، زیبا و منظم، برای کشف حقائق و بیان آن در رابطه متقابل با عناصر متشکله هر مقطع زمانی که تعقل در آن صورت بگیرد، خواهد بود، والزاماً "اندیشیدن و ریاضیات" همواره همراه خواهند بود.

۲- تاثیر نتایج ریاضی بر فلسفه:

قبلاً اشاره کردیم که یکی از مباحث فلسفه ریاضی بررسی نتایج فلسفی قضایای ریاضی است. در تاریخ فلسفه کراراً به مواردی برمی خوریم که تفکر فلسفی تحت تاثیر مستقیم ریاضیات بوده است. مثلاً افلاطون از پنج شکل منظم هندسه اقلیدسی در

میان چیستی ماده وبررسی ماده المواد هستی استفاده کرده است دنبالهٔ 2^{n-1} مبنای بیان تمثیلی کثرت الانوار مجرده درحکمت اشراقی است ، وغیره . اخیرا " سه قضیه مهم درریاضیات اثبات شده اندکه تاثیرآنها براندیشه فلسفی می تواندگویای چندمساله اصلی دروجودباشد . دراین مختصرفرصت بررسی عمیق این سه قضیه رانداریم ولی شمهٔ کوتاهی رابیان خواهیم کردوبیشترازاین نقطه نظرکه به رابطه متقابل فلسفه وریاضی اشاره کرده باشیم .

سه قضیه عبارتنداز :

۱ـ اولین قضیه عدم تمامیت " گُدل " : یک محمول وجوددارد که هیچ نظام کامل صحیح صوری برای آن وجودندارد .

۲ـ قضیه " چرچ " : یک محمول وجوددارد به طوریکه هیچ دستگاه صوری صحیحی رانمی توانیم درنظربگیریم که شامل شیوه‌ای برای تصمیم گیری درباره‌آن محمول ونقیض آن باشد .

۳ـ قضیه " اسکولم " : هیچ دستگاه سازگارجزمی صوری وجودندارد که بتواند اعدادطبیعی رابه نحوی بیان کند .

متوجه می شویم که هرسه قضیه به نحوی به محدودیت تعقل بشراشاره می کنند . ازقضیه " گدل " می توانیم نتیجه بگیریم که هیچ گاه انسان نمی تواندطبق یک برنامهٔ مشخص (مثلا " یک نظام صوری) همواره احکام صادق وتنها احکام صادق رآبیان کند . ازقضیه " چرچ " نتیجه می گیریم که همواره مجموعه‌ای مسائل حل ناشدنی برای بشروجوددارند ،وازقضیه " اسکولم " نتیجه می گیریم که هیچ

انسانی قادربه بیان کامل اعداد طبیعی نخواهدبود. قصدما چیست؟ واصلاً" محدودیت تعقل دربشرآیا خودامری بدیهی نیست؟ یک نتیجه ساده: تعقل مطلق ممتنع است و همواره برای انسان مجهولات وجودخواهندداشت. البته ممکن است چنین نتیجه‌ای را بدون دردست داشتن قضایای مذکوربتوانیم عنوان کنیم، ولی قدرمسلم این است که براهین اقامه شده قبول عدم تعقل مطلق را استوارتر می‌سازد و هرچند در علم المعرفت قائل باشیم که انسان به عنوان یک جوهراندیشمند قادربه تصورلایتناهی است ولی هیچ گاه قادربه تعقل لایتناهی نخواهدبود و نتوانست همه چیز را در وجود علی الاطلاق بداند.

حسین ضیائی