

بنام خداوند جان و خرد

دیباچه

تأمجموعه مقالات حاضر بصورت کتابی که در پیش روی دارید، درآید، دوسالی می بود که من بنده، حسین ضیائی، در دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی به تدریس فلسفه ریاضی اشتغال می داشتم. در این دوره، علاقمندی دانشجویان این درس، شوقی درمانگیخت، و برآن شدیم که سلسله‌ای از مقالات را در موضوع فلسفه ریاضی، و از آثار معاریف این حوزه فکری، بفارسی برگردانیم. تا این اندیشه جامه عمل بیوشد، در عهده گرفتیم که مقالاتی در این زمینه را انتخاب کنیم و برای ترجمه به دانشجویان این درس بسپاریم و خود نظارت و ارائه طریق به ایشان را تقبل کنیم. حالی ازمیان آن ترجمه‌ها، تعداد ۹ عنوان را، که بیشتر بامضمون کتاب حاضر متناسب و همخوان بود، برگزیدیم و یک مقاله هم، که خود به فارسی گردانیده و یکبار در شماره ۹ بولتن انجمن ریاضی ایران چاپ شده بود، به این مجموعه برافزودیم. دنباله کار را که عبارت می بود از ویرایش و مقابله و یکدست کردن زبان ترجمه‌ها و انتظام و انسجام و یکنواختی معادل فارسی اصطلاحات و تهیه واژه‌نامه‌ها و غیر آن، آستیم در عهده گرفت و با کنکاش مداوم باما، کتاب حاضر را به این سامان رسانید. و فروتنی و فروتنی را انصاف می دهیم که حاصل زحمات مکتبایی نیک و درخور شده است، و خدای را از هر جهت سپاس می گزاریم.

برای تایپ متن حاضر با "کمپوزر"، خانم عصمت رستمی زحمت کلانی را متحمل بوده‌اند، دستشان درد نکند و اجرشان با حق و بر ماست که زحمات زیاد ایشان را قدر

بشناسیم . واژه نامه‌های " فارسی - انگلیسی " و " انگلیسی - فارسی " را و فهارس کتاب را خانم شعیلا کام فر ، با دقت کامل تهیه کردند . به شرح ایضا " از زحمات ایشان امتنان داریم . آقای مرتضی کریمی ، در مقام ویراستار فنی ، کار آرایش و آماده سازی کتاب را عهده دار بود و نهایت ذوق و دقت در کار آورد . شکرالطاف او همواره در عهده ماست . دیگر از مراحل پر زحمت و مرارتبار ، تنظیم و تعبیه فرمولها و علائم ریاضی متن بوده است که ما خود ، من و آستیم ، این وظیفه را ، علاوه بر بازخوانی های مکرر ، انجام دادیم و شکر توفیق می گزاریم .

هم بر عهده ماست تا از مرکز ایرانی مطالعه فرهنگها قدر دانی کنیم ، که مراحل تایپ و آماده سازی و غیره ، با استفاده از امکانات و تسهیلات آن مرکز انجام پذیرفته است .

حسین ضیائی

پیش‌گفتار (۱)
معرفی مکتب‌های فلسفه ریاضی

۱- مقدمه

فلسفه ریاضی پژوهشی است درباره مبانی ریاضیات، و علمی است که مبتنی بر روش تحلیلی فلسفی، می‌کوشد به سوالهای چپستی (و دیگر مطالب اصلی) در ریاضیات پاسخ دهد. در بدو مقال‌بدین نکته باید اشاره کنیم: همانگونه که مثلا "فلسفه فیزیک به نظریات و قضایای علم فیزیک اضافه نمی‌کند، بلکه درباره قضایا، نظریات، و بطور کلی ساختمانهای ریاضی و سیرتطور و تحول آنها تحقیق میکند. اما همواره فلسفه یک علم باعث تحولات اساسی و بنیانی در آن علم میشود، گویانکه بسیاری از ریاضی دانها معتقد نیستند که فلسفه ریاضی به پیشرفت فنون ریاضی کمک میکند. اهمیت فلسفه ریاضی، اما، برای متفکران ریاضیدان و اهل فلسفه همواره مشخص بوده، و از دوران اوائل تدوین و بیان فلسفه ریاضیات، علمای این دو علم حتی قائل به نوعی وحدت مابین فلسفه و ریاضی بوده‌اند. در عالمی که هستی را به بودن و شدن تقسیم کرده‌اند، حقائق ریاضی میرا از تغییر و متعلق به بودن شناخته میشوند، و این خود در فلسفه ارزش بسزائی دارد: این چگونه علمی است که قضایای آن ربطی به تغییر و کون و فساد موضوع

۱- برخی از مطالب این پیش‌گفتار در مقاله: "بحشی اجمالی پیرامون مسائل میانی و فلسفه ریاضی، مجله علمی الگوریتم، شماره ۲ (۱۳۵۸) تالیف حسین ضیائی، قبلا" بچاپ رسیده است.

ندارد، بررسی چگونگی یک چنین نکته، اصلی درزمره، مسائل فلسفه ریاضی است.

فلسفه همواره باسئوال آغاز میشود. در طی تاریخ، نظام های فلسفی متشکل بوده است از مجموعه، پاسخ های افرادی که با این علم سروکار داشته اند. اکثر سئوال ها، از همان بدو شروع به تفکر منظمی که فلسفه نامیده شده است تاکنون، به قوت خود باقی هستند، تنها پاسخ ها تغییر پذیرفته اند و کامل تر شده اند. مثلا "سئوال "عدد چیست؟" حداقل از زمان فیثاغورث تا امروزیکی از سئوال های اصلی فلسفه ریاضی بشمار می آید.

جنبه های این سئوال: "آیا عدد مفهوم و تصویری است کاملا" مجرد از ماده که وجود آن تنها در ذهن متحقق میگردد؟" و "آیا عدد منتزع از ماده است ولی در دنیای خارج از ذهن مصداق می یابد؟"، و "آیا عدد درجه ای است از تجلی حقیقتی مثالی که والا تر از ذهن بشر است؟" و "آیا عدد صورتی است ساخته ذهن بشر داخل در نظام بدیسی و یا موضوعی و اصل متعارفی، که آنهم ساخته ذهن است؟". پاسخ به اینگونه سئوال ها و جوانب مختلف آنها در طی سالیان دراز تاریخ ریاضیات همواره ذهن متفکران را بخود مشغول میداشته و در ضمن سازنده، نظریه های مکتب های مختلف مابنی ریاضیات بوده است. با اندک تامل در ماهیت اینگونه سئوال ها میتوانیم نتیجه بگیریم که نه تنها درباره، اکثر مفاهیم ریاضی بلکه درباره، خود مفهوم ریاضی نیز میتوان از این قبیل سئوال ها مطرح ساخت. قدر مسلم این است که می توانیم تعداد بیشتری پرسش فلسفی درباره ریاضی و مسائل جزئی ریاضیات مطرح کنیم ولی برای اینکه بتوانیم به نتیجه برسیم و بتوانیم حدود معینی را برای پاسخ هایمان مشخص کنیم، باید اصول و مبانی سئوالها را پیدا کنیم؛ و این خود مستلزم آن است که اصول نظریاتی را بنیان بگذاریم که سئوال های مختلف بر آن متکی می توانند بود. بطور خلاصه اگر قائل به تعریف کلی از فلسفه: که "تحقیق درباره ماهیت اشیا، بقدر طاقت بشر" است، باشیم، وجود، حقیقت، امتداد، مقولاتی و رابطه، اشیا، ریاضی را در ارتباط با موضوع مدرک (مثلا) خود ریاضیدان (یا بدو در فلسفه، ریاضی مورد بررسی قرار دهیم. البته دید فلسفی ما یقینا بر نحوه، تحلیلی که از وجود و حقیقت اشیا، ریاضی انجام می دهیم تاثیر می گذارد. و مثلا "اگر دید کلی ما از شناخت دیدی اشراقی، آرمان گرای یا واقع گرای باشد، مسألی را که مربوط به شناخت اشیا، ریاضی میشوند، به شیوه، خاص مبتنی بر دید کلی فلسفی بیان خواهیم کرد.

پس از یک سو فلسفه ریاضی تحقیقی است فلسفی از ریاضیات، اما از سوی دیگر، چون فلاسفه همواره شیفته، دو جنبه، کلی ریاضیات یعنی نظام پردازش و دقت ساختمان

قضایای ریاضی (مسلم بودن نتایج دستگاههای اصل متعارفی) بوده‌اند، نتایج ریاضیات همواره در خودبینش فلسفه و شیوه تحلیل فلسفی تاثیر زیادی گذاشته است. البته خود مساله نظام پردازی در ریاضیات دامنه وسیعی دارد که محتاج به توضیح نیست و روش اصل متعارفی که در ریاضیات تا این اندازه پیشرفته است، دارای مبانی فلسفی است و منتج از سئوالهایی است که در اصل شناخت و سپس از شناخت ریاضی مطرح شده است. مانیز چنانچه بخواهیم بطور منظم پیش رویم اولین مساله‌ای را که باید مطرح کنیم (و این مساله‌ایست که همواره در حیطه ریاضیات مطرح شده است) مساله بررسی ریاضیات از نقطه نظر شناخت شناسی است، و در بدو شروع به چنین بررسی‌ای مساله ماتقدم بودن مفاهیم و معرفت‌های ریاضی پیش می‌آید. جای تعجب نیست که اکثر فلاسفه و بخصوص کانت که این مساله را بطور منظم بررسی کرده بود، ریاضیات را معرفتی ماتقدم و از پیش موجود می‌دانند. ولی اخیراً "برخی از ریاضیدانها که گرایش به مطرح کردن سئوالات فلسفی در ریاضی دارند، مثلاً "فرگه و راسل سعی کرده‌اند که با ارائه دادن تحلیلات منطقی درباره مفاهیمی مانند مجموعه و اعداد طبیعی ریاضیات را به نحوی، داخل در قلمرو منطق بدانند و منطق را هم روابط بین صورتهای ساختمان پذیرفته در نظام‌های مختلف قلمداد کنند (یعنی قائل بوجود مستقل ریاضی نیستند). پس مساله معرفت ماتقدم و معرفت ماتاخر و تجربی مساله‌ایست فلسفی، هم در رابطه با مفهوم ریاضی بطور کلی، و هم در رابطه با مفاهیم جزئی ریاضی.

سیر تکامل ریاضیات جدید بخصوص با در نظر گرفتن جنبه تجرد و وابستگی آن به دانش مجموعه‌ها همراه با مسائلی بود که به افلاطون گرائی موسوم هستند. در طی قرن نوزدهم ریاضیدانها در تنظیم قضایای حساب و آنالیز، که بر مبنای اصول متعارف بنا شده بود، و در راه استوار ساختن قضایای آنالیز و حساب بر مبنای نظریه اعداد طبیعی از دیدگاه افلاطون گرائی کوششهایی مبذول داشتند. در این مورد کارهایی که کانتور در مجموعه‌ها انجام داد اصول این نظام پردازی در ریاضیات را بی ریخت که جهتی به سمت تجرد هر چه بیشتر در ریاضیات داشت و شامل فرضیات افلاطون گرائی بود. بحث در مساله افلاطون گرائی بالا گرفت و سه نظریه مختلف به میان گذاشته شد. حادثه‌ترین این سه نظریه، که با مخالفت با نظریه کلی افلاطون گرائی برخاست، شهود گرائی است که بانی آن براور ریاضی دان معروف هلندی بود. در مقابل این نظریه، روش هیلبرت قرار گرفته است که به نام صورت گرائی معروف شد، و نظریه سوم منطق گرائی نام دارد که بر پایه نظریات فرگه و راسل استوار گشته.

یکی از مهم ترین مسائل فلسفه ریاضی سوالی است درباره ارتباط ریاضیات با تجربه و این سوالی است که از زمانهای قدیم مطرح شده است. بدین معنی که آیا ریاضی علمی است مانند فیزیک که ما سوای تجربه در حله اول، و ما سوای ذرک و تجربه موضوع مدرک در حله دوم، تحقق می پذیرد و منتظم میشود؟ یا اینکه، آیا ریاضی علمی است بر مبنای تجربه موضوع مدرک (چه در ذهن و چه در حس و یا هر دو)؟ البته پاسخ کاملی را نمی توانیم ارائه دهیم که بتوان آنرا اثبات کرد و احيانا "آنرا بعنوان فرضیه ای قبول نمود، ولی بررسی این مساله از دیدگاههای مختلف فلسفی و مبانی ریاضی نمایانگر جوانب این مساله است و ما را با نحوه تفکر و شیوه های مختلف تحلیلی فلسفی - ریاضی در جهت بررسی این مساله آشنا میسازد. باید متذکر شد که در ریاضیات عملی و در علوم عملی بطور کلی چنین سوالهای انتزاعی در سازگاری و نتیجه گیری الزاما "راهی ندارد. و مثلا" برای یک فیزیک دان که از ریاضیات در اندازه گیری پدیده های طبیعی استفاده میکند سوال اینکه آیا $a=b$ و $b=c$ پس $a=c$ امری است بدیهی و یا اینکه اصلا" موضع بدیهیات در یک نظام اصل متعارفی و ارتباط آن با اصول موضوعه چیست، ممکن است سوال بی موردی باشد. و شاید بعضی ریاضیدانها قائل باین باشند که ریاضیات بدون بررسی سوالها و مسائل مبانی و فلسفی بکار خود ادامه خواهد داد و سازگاری خود را از دست نخواهد داد، و مطرح کردن یا مطرح نکردن سوالات فلسفی بیارمون چیست و حقیقت ریاضی ربطی به "پیشرفت" ریاضی نخواهد داشت. البته موضع فلسفی و موضع ریاضیدانهای مانند فرگه، کانتور، براور، هیلبرت، و غیره از یک سو و فلاسفه بطور کلی این است که "پیشرفت" در ریاضیات محض با کاربرد و یا عدم کاربرد مطالب مربوط نیست.

مساله حقیقت در ریاضیات نیز، که یکی از اساسی ترین مسائل فلسفی - ریاضی است از نقطه نظر برخی ریاضیدانان صرفا" در رابطه با استحکام اثبات هائی از صدق گزاره های ریاضی عنوان میشود. اینگونه ریاضیدانها ضمن اظهار اینکه ریاضی علم نیست معتقدند که حقیقت ریاضی صرفا" بیانی است از شیوه های اثبات انتخاب شده در حل مسائل، ولی اکثر ریاضیدانهای که قائل به گویا بودن موضع فلسفی - ریاضی هستند اعتقاد دارند که ریاضی علمی است دارای موضوع خاص و نتایج حقیقی فراگیر و دارای ماهیتی مشخص که والا تر و عمیق تر است از صرفا" روابط منطقی بین گزاره های صوری، یعنی حقیقت ریاضی را صرفا" یک حقیقتی منطقی نمی دانند.

۲- مکتب‌های مبانی ریاضی :

۲-۱- مبانی منطق گرای ریاضیات :

لایب‌نیتز فیلسوف شهیر آلمانی که یکی از بنیان گزاران منطق ریاضی بشمار میرود مصرا " قائل باین بود که نظام های ریاضی میتوانند قالب خوبی برای مبانی تفکر باشند ، و این دیدگاه پیروان زیادی یافت . ولی نظریه دیگر او که حقائق ریاضی و منطق هر دو را مبتنی بر اصل تناقض $(\forall x \sim (p(x) \wedge \sim p(x)))$ میدانست ، هر چند یکی از اصول منطق گرائی است ، در دیگر مکتب‌های مبانی ریاضی پیروان چندانی نیافت . این نقطه - نظر منجر به این میشود که کلیه حقائق ریاضی و منطق در نهایت امر قابل به تجزیه به گزاره‌های یگانه هستند و این عمل تجزیه شامل تعداد محدودی از مراحل است . مثلا " ما هر آینه مواجهه بایک بیان ریاضی $\Phi(x_n)$ شدیم الزاما " خواهیم توانست پس از مراحل محدود ، α_n ، $(\alpha_n : |n| < \infty)$ را به یک گزاره یگانه یابیم همان گویی منطقی تجزیه کنیم : مثلا " به گزاره " مرکبی مانند

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ که همواره دارای ارزش یگانه است ، بدون توجه به ارزشهای جداگانه اجزاء متشکله آن (p, q, r) عبارت دیگر این نظریه قائل باین است که تمام ریاضیات را میتوان بر مبنای تعدادی گزاره صادق منطقی بر مبنای اصول منطق (یعنی مساوی تجربه ذهنی مرحله به مرحله از اثبات و ساختمان ریاضی توسط ریاضیدان) بنا نمود . منطق گرایان با کوشش فراوان سعی کردند این برنامه را در ریاضیات به مرحله عمل در آورند و ریاضیات را بر مبنای روابط اصلی منطقی و گزاره‌های همواره صادق بنا نمایند . البته نظریه گزاره‌های یگانه مانند نظریه " گزاره‌های تحلیلی کانت بسیار ساده تر از آن است که بتوان کلیه ریاضیات را بر مبنای آن بنا نمود ، و انتقاد اصلی بر منطق گرایان این است که خود اصل تناقض یک گزاره یگانه و به اصطلاح کانت یک گزاره ماتریم تحلیلی است ، علی الخصوص که اصول منتج از اصل تناقض $A \rightarrow \sim \sim A$ و $\sim \sim A \rightarrow A$ ضروری ، (به معنای اصلی فلسفی ضرورت) نیستند ، چون در نظام های منطقی چند ارزشی اصولی مانند $A \rightarrow \sim \sim A$ به کنار گذاشته میشوند . عبارت ساده الزاما " در ساختمان ریاضیات نمی توانیم شهود و تعقل بلا واسطه ریاضیدان را کلا " انکار کنیم .

موضع منطق گرائی توسط فرگه ، راسل و پیروان آنها بصورت یک برنامه عملی درآمد .

فرگه توانست بجای مفهوم گزاره یگان - که دریدو امرجیزی جز نشان دادن شمول محمول در موضوع $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow Q \in P$ نمی بود - مفهومی منسجم تر و گویاتر تحت عنوان تحلیلی به کاربرد (این مفهوم برابر است با کاربرد دقیق نوعی خاص از استلزام: گزاره‌هایی بعنوان اصل مورد قبول هستند که بتوان آنها را صرفاً "از قوانین اصولی منطق و تعاریف مربوط به آنها استنتاج نمود.) و نیز فرگه موفق شد که بزعم خودش، تحلیل و تجزیه حقائق ریاضی را از طریق اقامه اثبات برای تحلیلی بودن گزاره انجام دهد. از این طریق فرگه و منطق گرایان توانستند نشان بدهند که علم حساب (حداقل در مرتبه اول) دارای خاصیت خاص تحلیلی است که خودمیتنی است بر قوانین اصل منطق. یعنی مثلاً $p_i(x)$ را بتوان در نهایت امر به p که گزاره‌ای همان و تحلیلی و یکی از قوانین کلی منطق است تبدیل نمود (با استفاده از ۱- تبدیل یک نظام علامتی دیگری: ۲- تنها استفاده از ضوابط مسلم و مفروض نینداختن گزاره‌هایی که اثبات نشده‌اند):

$$p_i(x), \beta_i : \sum_{i=1}^n p_i(x) \beta_i \rightarrow P$$

تحلیلی بودن علم حساب، چنانچه منطق گرایان نشان داده‌اند، بریک پیش فرض بسیار مهم استوار است: قوانین کلی منطق بدیهی هستند. پس آغاز ساختمان ریاضی به نحوی با فطرت انسان آمیخته است. چون امر بدیهی بلا واسطه و دفعتاً "مدرک است، و عقل فطری انسان در چنین تحرک ادراکی دخیل است و چون فطریات از جمله اموری هستند که وجود آنها قائم بر ادله مابعدالطبیعی است (مثلاً نفس و اهب الصور در وجود فطریات)، پس ساختمان ریاضی نمیتواند صد در صد امری مکانیکی - منطقی باشد. این نکته مهم را منطق گرایان بکلی نادیده گرفته‌اند و اصولاً "اشاره‌ای به چگونگی فطری بودن قوانین کلی منطق نکرده‌اند.

منطق گرایان در اثبات تحلیلی بودن علم حساب، محتاج به یک سلسله تبدیل علائم اند. در مرحله اول تبدیل علائم الفاظ (و در حالت ترکیبی، احکام) نمادین شده صرفاً "منطقی هستند. مثلاً علائم متغییرات گزاره‌ها (p, q, r, s, t, \dots) و علامت عطف (\wedge)، و علامت فصل (\vee)، و علامت سلب (\sim) و غیره. ولی احکام نمادین شده در مراحل نهائی الزاماً شامل علائمی خواهند بود که بر حسب ظاهر، منطقی بودن آنها ضروری نیست، و تنها پس از اقامه براهین، منطق بودن آنها تثبیت میشود. پس در یکی از مراحل اثبات - از مقدمات تا نتیجه - تبدیل علائم منطقی صرف به علائم دیگر صورت میگیرد، در این مرحله تعریف، وحد منطقی، نقش مهمی را ایفا میکند. و در

اینجا اساسی‌ترین تمایز داخلی، در نظام مابانی منطق گرای ریاضیات، وجود دارد، یعنی تمایز بین نظریه فرگه از یک سو و نظریه راسل از سوی دیگر: نظریه فرگه درباره تعریف و حد منطقی نظریه‌ایست واقع گرای، یعنی حد منطقی را قولی که دلالت بر ماهیت بکند میدانند و در نتیجه قائل به ماهیت قابل اشاره از برای اشیاء ریاضی معرف است؛ و نظریه راسل نظریه‌ای است نام‌گرای یعنی تعریف را صرفاً " وسیله‌ای برای تبدیل یک سری علائم به علائم دیگر میداند. برای راسل تعریف صرفاً " بیانی است از ترکیب تازه‌ای از علائم بر مبنای ترکیبی از پیش شناخته شده، و بنابراین تعریف را در اصل قولی که دلالت برجیزی بکنند می‌داند، بلکه تعریف را قولی میدانند دارای قابلیت ایجاد تسهیل در مراحل اثبات. بر مبنای چنین نظریه‌ای تعریف نوعی اختصار در بیان مطالب دانسته شده است و برای راسل تعریف یک عدد خاصی (مثلاً) وقتی می‌گوئیم تنها عددی که فلان خاصیت را دارد)، بایک طبقه از اعداد (مثلاً) طبقه اعداد صحیح تقسیم پذیره دو) بیانی است از چیزهائی صرفاً " منطقی، غیرمادی و ذهنی. نظر راسل در این مورد بیروان زیادی ندارد و موضع خادی از منطق گرائی است. ولی موضع فرگه. که بر بینش فلسفی عمیق‌تر دلالت میکند، بیروان بیشتری دارد. فرگه معتقد است که اعداد اشیاء منطقی هستند و هدف فلسفه ریاضی این است که آنها را مشخص کند البته، بزعم فرگه تعریف عدد مترادف با خلق آن نیست بلکه تحدید چیزی است که استقلال وجودی دارد. برای فرگه تعریف عدد از طریق تمایز کردن آن در یک مرحله ساختمان ریاضی کافی نیست، و نیز نمیتوان عدد را بعنوان یک اصل موضوعه تعریف کرد. باید عدد را از طریق تعریف مشخص نمود و باید تعریف قولی که دلالت بر ماهیت میکند باشد، و در نتیجه باید وجود عدد از طریق تعریف بیان شود. تعریف فرگه از عدد بسیار مشهور و مفصل است و در این مختصر مجالی برای بیان آن را نداریم ولی اصل حاکم بر نظریه فرگه چنین است:

بیان: تابع $\phi(\xi)$ دارای بردارزشهای یکسان با تابع $\psi(\xi)$ است را مترادف بایمان: تابع $\phi(\xi)$ و تابع $\psi(\xi)$ درازای احکام همسان ارزش برابر دارند میدانند. تابع $\phi(\xi)$ چنین است که ξ ها توسط اشیاء ریاضی مورد نظر پیرمیشود و $\phi(\xi)$ را فرگه یک مفهوم میدانند اگر درازای تبدیل اشیاء ریاضی به ξ حکم بدست آمده یک گزاره صادق (یا کاذب) باشد.

در بالا متذکر شدیم که منطق گرایان در برنامه ساختمان ریاضی، بر مبنای اصول کلی ریاضی، از گزاره‌های همواره صادق استفاده میکنند. عبارت دیگر گزاره‌های همواره

صادق یا همان گوئی های منطقی در برنامه منطق گرایان بعنوان مقدمات مسلم در اقامه براهین استفاده میشود. این چنین گزاره‌هایی از طریق بررسی توابع صدقی بدست می‌آیند. مثلاً تابع صدقی (p_1, p_2, \dots, p_n) "منطقاً" ضروری است اگر و تنها اگر ارزش کلی آن درازای ارزشهای متفاوت p_1, p_2, \dots, p_n همواره صدق باشد. مثلاً "گزاره مرکب $(p \wedge q) \rightarrow q$ همواره صادق است و یا گزاره $(p \rightarrow q) \wedge p$ همواره صادق است (چه p و q صادق باشند چه کاذب). توابع صدقی رامینای ثوابت منطقی پنج گانه: رابطه عطف \wedge ، رابطه فصل \vee ، رابطه لزوم \rightarrow ، رابطه سلب \sim ، رابطه لزوم دوطرفه \leftrightarrow ، می‌شناسیم و بیان می‌کنیم. مثلاً "تابع صدقی عطف، که برای دو متغیر دارای چهار حالت است:

(T علامت صدق، F علامت کذب)

$$\wedge(p, q) \begin{cases} \wedge(T, T) = T \\ \wedge(T, F) = F \\ \wedge(F, T) = F \\ \wedge(F, F) = F \end{cases}$$

تسهادریک مورد منطقاً" ضروری است. عبارت دیگر در ساختمان ریاضی، ما از تابع (p_1, p_2, \dots, p_n) بعنوان یک مقدمه مسلم، تنها در موردی میتوانیم استفاده کنیم که کلیه p ها صادق باشند. مثال دیگر تابع صدقی فصل است (برای دو متغیر)

$$\vee(p, q) \begin{cases} \vee(T, T) = T \\ \vee(T, F) = T \\ \vee(F, T) = T \\ \vee(F, F) = F \end{cases}$$

متوجه می‌شویم که از چنین تابعی در موارد متعددی میتوانیم بعنوان یک تابع منطقاً" ضروری استفاده کنیم، یعنی $\vee(p_1, \dots, p_n) = T$ اگر $\exists p_k : p_k = T$ (یعنی تنها یک گزاره صادق). ارزش توابع منطقاً" ضروری در برنامه منطق گرائی کاملاً" مشهود است، چون طبقه توابع صدقی همسان یا همواره صادق کاملاً" تعریف شده است؛ و چون صرفاً" از طریق یک شیوه مکانیکی میتوان توابع صدقی همواره صادق را شناخت. چنین توابعی، تماماً" بعنوان مقدمات مسلم، در برنامه منطق گرائی و ساختمان ریاضی، بر مبنای اصول منطق استفاده میشوند. ولی در ساختمان ریاضی منطق گرایان احتیاج به مقدمات دیگری دارند و در اینجاست که ضعف برنامه آنها دیده میشود. خود شیوه ساختمانی

مورد استفاده راسل در کتاب معروفش اصول ریاضیات شیوه ساده‌ای است :

در ابتدا از مجموعه‌ای، مثلا " S ، که علم بدان داریم شروع میکنیم. در بعد و امر خواهد چنین اقتضای کند که S را قبول کنیم ، ولی با مشکلات زیر روبرو میشویم : (۱- ادعاهای شناخت مربوط به S رابه سهولت نمی توانیم قبول کنیم (مثلا " آیا صحیح است که $(\forall a, \forall b: a, b \in S$; ۲- مسائل حل نشده در S وجود دارند

(مثلا " آیا صحیح است که $(\forall a, a \in S: \exists e: e \in S \rightarrow a.e = e.a$;

۳- درباره وجود عناصر نمیتوانیم تصمیم قاطع بگیریم (مثلا " آیا صحیح است که

$$(\forall a, a \in S: \exists b, b \in S \rightarrow a.b = b.a = e$$

شیوه ساختمانی مورد نظر راسل در چنین مواردی S را بر مبنای مجموعه از پیش بیان شده در نظر میگیرد و بنا میکند (مثلا " S را در مقابل یک گروه آبدلی G بیان میکند).

اشکال عمده راسل، اما، در وجود بینهایت است: آیا باید وجود بینهایت را امری بدیهی بدانیم؟ و موضع آنرا همانند دیگر اصول بدیهی منطق مانند عطف، فصل، اندخال، اندراج، وغیره؟ و آیا اینکه باید وجود بی نهایت را بعنوان یک اصل موضوعه در ساختمان ریاضیات بپذیریم؟ راسل هر دو کار را کرد. در چاپ اول اصول ریاضیات وجود بینهایت را بعنوان یک اصل بدیهی، یا متعارف، قبول کرد، و در چاپ دوم همان کتاب وجود بینهایت را بعنوان یک اصل موضوعه پذیرفت. در هر دو مورد منطق گزائی با اشکال روبروست، چه اگر ریاضیات تماما " متاخر بر منطق و منتج از آن است، باید در ساختمان ریاضی در هیچ مرحله تعقل شهودی موضوع مدرک دخالتی نداشته باشد. ولی چگونه میتوان بی نهایت را صرفا " بر مبنای منطق شناخت. و اصولا " استفاده، بدون دقت و تعمق کافی، از بینهایت در ساختمان ریاضی توسط راسل و فرگه ضعفی اساسی در فلسفه ریاضی منطق گزائی است.

حال ببینیم که نهاده اصلی فرگه - راسل (یعنی نظرگاه مکتب منطق گزائی)، که منطق را بجای آلتی یا شیوه‌ای برای ساختمان ریاضیات بعنوان مولدو اصل ساختمان ریاضیات میداند، و ریاضیات را قابل استخراج و استنتاج از منطق، چگونه در عمل بکار گرفته میشود.

این دید فلسفی - ریاضی در کتاب معروف راسل و وایتهد یعنی کتاب اصول ریاضیات بنا بر اظهار خود مولفان (در مقدمه کتاب) مبتنی است بر: ۱- آنالیز و هنده واصل متعارفی کردن این دو قسمت از ریاضیات، ۲- منطق صوری، که در زمان نگارش کتاب، بخاطر پژوهشهای ریاضیدانهای مانند پیاانو، وغیره، در سطحی بالا و شامل

فنون دقیق عرضه شده بود. هدف اصلی راسل عرضه یک مجموعه اصول متعارف اولیه (یا بدوی) منطقی بود که منطقیون آنها را در قالب گزاره‌ها و احکام صادق بدانند و تمام ریاضیات را بتوان بر مبنای آنها بنا کرد.

۱-۱-۲ برنامه منطقی‌گرای

۱- اصول متعارف منطقی بعنوان مبنا و اساس برنامه: تعدادی اصول متعارف اولیه (بدوی یا ابتدائی) وجود دارند، این اصول صادق هستند و ریاضیات بر مبنای آنها ساخته میشود. فی المثل عدد بعنوان اینکه دارای معنایی منحصر است تعریف میشود: ۱ (عدد یک) تحت عنوان واحد شناخته میشود، و نه بعنوان عضو اول یک رشته، چنانچه بیان فرض کرده بود (چون اولین عضو میتواند ۰، ۲، ۳، و غیره فرض شود).

۲- نمادهای اولیه، گزاره‌ها و توابع گزاره‌ای: همانگونه که در شیوه اصل متعارفی عمل میشود، ساختمان ریاضی با تعدادی مفاهیم اولیه تعریف نشده آغاز میشود، اما راسل و وایتهد معنایی را هم برای این مفاهیم اولیه ارائه میکنند، و این صرفاً در جهت آشنا کردن خواننده با مفاهیم است و نه بعنوان تعریف آنها (زیرا مفاهیم اولیه بسیط بوده و هرگونه "تعریف" منجر به دورتسلسل میشود).

۱-۲-۱ معانی اولیه (یا مثل اولیه): اولیه‌ترین و ابتدائی‌ترین مفهوم تام در کتاب (برنامه) اصول ریاضیات مفهوم گزاره است. این مفهوم، که نظیر ثوابت جبر و نقاط هندسه میباشد فقط شامل مفاهیم ثابت است. مفاهیمی چون "آفتاب درخشان است"، "شیر سفید است"، نه مفهومی مانند "x فلان است"، چون حکم اخیر شامل یک متغیر است. از متغیر در رابطه بایک حوزه صادق ارزشها استفاده میشود. احکامی که شامل متغیرها هستند تنها در صورتی گزاره میشوند که بجای همه متغیرها ارزشهای مشخص گذاشته شوند، و در آن صورت توابع گزاره‌ای نامیده میشوند. به گزاره‌ها ارزشهای صادق (صدق T، کذب F) داده میشود. در واقع گزاره عبارت از معنایی است که طی یک حکم در جمله شمول یافته باشد مثلاً "قند شیرین است" و "sugar is sweet" هماناد و گزاره همان هستند، اما صورتشان متفاوت است.

۱-۲-۲ نمادها: گزاره‌ها را با علائم p, q, r, s نشان میدهند و توابع گزاره‌ای معمولاً با علائمی مانند $\phi x, \psi y$ و غیره نمایش داده میشوند (مثلاً ϕx تابعی را نشان میدهد بایک متغیر x). صدق گزاره را با علامت \vdash می‌نمایانند مثلاً $\vdash p$ حکم به صدق گزاره میکند. (اشاره میکنیم که در کتاب اصول ریاضیات کلیه "پیرانتزها"، "آکولادها" و غیره را توسط نقاط

(ه) نشان می‌دهند. مثلا "pvq". بجای (pvq); pvq; . برای [(pvq)]، ولی چون یک نوع علامت گذاری نامعمول است ما از همان نظام معمول با "پرانتز" استفاده خواهیم کرد). سلب را با علامت ~ نشان می‌دهند، و فصل را با علامت \cdot و حاصل اعمال هر یک از این علامت بر یک گزاره، خود یک گزاره است. پس اگر p و q گزاره باشند $\sim(p \vee q)$ هم گزاره است. استلزام در اصول ریاضیات با علامت \supset نشان داده میشود (مطابق علامت \rightarrow در کتاب حاضر) و استلزام از قرار ذیل تعریف میشود: (استلزام مادی)

$$p \supset q = . \sim p \vee q \quad \text{Df}$$

$$(p \rightarrow q) = (\sim p \vee q) \quad \text{Df}$$

۳-۲- گزاره‌های اولیه: اصول متعارف حساب گزاره‌ها (شامل قسمت اول کتاب

اصول ریاضیات) عبارتند از:

- I. $p \vee p \supset p$
 $[(p \vee p) \rightarrow p]$
- II. $q \supset p \vee q$
 $[q \rightarrow (p \vee q)]$
- III. $p \vee q \supset q \vee p$
 $[(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)]$
- IV. $p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)$
 $[(p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r))]$
- V. $q \supset r \supset p \vee q \supset p \vee r$
 $[(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]]$

قسمت های بعدی برنامه منطق گرای شامل: حساب گزاره‌ها و حساب محمولات

در این مختصر نمی‌گنجد. راسل و وایتهد با این برنامه، که به هر حال بعنوان یک نهاده فلسفه ریاضی دیگر پیروان چندانی ندارد، خدمت بسزایی به گسترش منطق ریاضی کردند.

۲-۲- مبانی صورت گرای ریاضیات :

قبلاً" متذکر شدیم که افکار و آراء فلسفی لایبنتیز درباره ساختمان ریاضی، و علی‌الخصوص مفهوم گزاره‌های یکسان او، باعث تدوین و گسترش تفکر فلسفی در ریاضیات شد و این تفکر منجر به منطق گرائی شد. افکار فلسفی کانت مبنای دو طرز تفکر در فلسفه ریاضی است: صورت‌گرایی و شهود‌گرایی. برای کانت نقش منطق در ریاضیات همان نقشی است که در دیگر علوم، و به عبارت دیگر در دانستن، دارد. از نقطه نظر کانت هرچند قضایا و نتایج ریاضی مبتنی بر اصول متعارف، توسط اصول منطق بدست می‌آیند، اصول متعارف و قضایای ریاضی خود اصول منطق نیستند و اصلاً تجلی خاصی از اصول منطق نیز نمی‌توانند باشند.

هیلبرت با الهام از تفکرات فلسفی کانت برنامه‌ای را در ساختمان و فلسفه ریاضی تدوین کرد که به صورت‌گرایی موسوم شد. به گفته هیلبرت (و این نکته مخالف اصول منطق‌گرایی است) چیزی که دراستنتاج‌های منطقی و احکام مرکب منطق مفروض است از پیش در مفروضات اولیه تعقل مندرج است. یعنی ریاضی‌دان در ذهن خود، از پیش، اشیاء غیر منطقی متعینی را، که از طریق حدس فلسفی برای او آشکار است، بلاواسطه کسب می‌کند، و این اشیاء هستند که اصول تفکر ریاضی او را می‌سازند. یعنی برخلاف منطق‌گرایان که ریاضیات را مبتنی بر اصول مسلم منطق قابل ساخته شدن می‌دانند، صورت‌گرایان اصول اولیه ساختمان ریاضی را در وجود اشیاء ضروری فرامنطقی بازمی‌شناسند. در این نوع ریاضیات تناقض‌های بنیانی وجود ندارند. تناقض‌هایی که مبتنی بر مفهوم بی‌نهایت بالفعل، پایه‌های منطق‌گرایی را متزلزل میکرد. از آنجا که مفهوم بی‌نهایت بالفعل هیچگونه رسم و یا تحدیدی از اشیاء متعین نیست، در برنامه صورت‌گرایی مورد نظر نمی‌باشد. تفاوت بین هیلبرت و براور (بانی مکتب شهود‌گرایی) در رابطه با ریاضیات ترانسفینی از نوع کانتور است: هیلبرت پارافراز را از ریاضیات ترانسفینی نمی‌گذارد، ولی براور می‌گوید کوشد تا به نحوی بیانی از بی‌نهایت را ارائه دهد. هیلبرت مفهوم واقعی ریاضیات محدود را از مفهوم آرمانی ریاضیات ترانسفینی متمایز می‌سازد، و می‌گوید کوشد تا به نحوی اثباتی از سازگاری دستگاهی متشکل از ریاضیات محدود، به انضمام ریاضیات ترانسفینی، ارائه دهد. و برنامه هیلبرت مبتنی بر دو مفهوم اصلی است: ۱- ریاضیات شامل ترسیم از اشیاء و ساختمانهای متعین است. ۲- انضمام عناصر آرمانی به یک قضیه ریاضی مستلزم اثبات سازگاری دستگاه ریاضی مورد نظر است؛ و اینجاست که به تعریف کلی از

صورت گزائی می‌توانیم اشاره کنیم: ریاضیات علم دستگاههای صوری است. یعنی، و برخلاف منطق گزائی، ریاضیات قدم به قدم توسط اثبات سازگاری دستگاههای صوری ساخته میشود، و یک نظام کلی منطق غیرمرتبط با موضوع مدرک نیست، و همواره رابطه مدرک و مدرک در ساختمان ریاضی از جمله شرایط اولیه است.

برنامه هیلبرت، در اثبات سازگاری نظام های صوری خلاصه میشود. البته اثبات سازگاری یک دستگاه متشکل از گزاره‌های مختلف که خودبیدین معنی است که نشان داده شود که هیچ دو گزاره متناقض وجود ندارد، کار ساده‌ای نیست. چون این کار مستلزم این است که کلیه گزاره‌ها بررسی شوند، و تنها در مورد نظام‌هایی که تعداد گزاره‌ها محدود و قابل شمارش هستند امکان پذیر است. این برنامه (در ذیل رئوس آنرا ذکر خواهیم کرد) بر مبنای دوشبیه اثبات: مستقیم و غیرمستقیم، استوار گشته است. در بعضی از موارد میتوان نشان داد که گزاره‌های متناقض الزاما، بخاطر رابطه بین اصول متعارف، تعاریف و اصول موضوعه، استنتاج نمی‌شوند، و در موارد دیگر با فرض "مدل" - های ریاضی عدم تناقض را میتوان نشان داد. بطور خلاصه صورت گزایان می‌کوشند:

- ۱- اشیاء دستگاه صوری را در ازای اشیاء متعین مشخص کنند: ۲- اصول موضوعه دستگاه صوری را در رابطه با اشیاء متعینی (مفروض شده) بر مبنای خود رابطه مشخص کنند،
- ۳- نشان دهند که بخاطر ۱ و ۲ هر استنتاجی که داخل نظام صوری انجام میشود الزاما به تناقض منجر نخواهد شد. (این مساعی ۳ شقی ۲۰۱ و ۳) در مواردی که شمارش گزاره‌ها امکان پذیر نیست راه گزیری تواند بود.

صورت گزایان دستگاه صوری را چنانچه در ذیل آمده تعریف می‌کنند. اشاره میکنیم که نقش اشیاء متعین در چنین دستگاههایی نقشی اساسی است، و استفاده از آن نه تنها در فلسفه ریاضی‌ای که صورت گزائی‌رامی پذیرد عنوان شده، بلکه نفس وجود و ضوابط متشکله دستگاههای صوری کاربرد فراوانی در ریاضیات معمولی نیز دارد. عناصر متشکله دستگاههای صوری عبارتند از:

۱- اصطلاحات فنی یا جمله‌ها (Terms):

الف - داده‌های متعین (Tokens): عبارتند از اشیاء متعین مختلف، مثلا "علائم روی کاغذ، سنگ ریزه، و هرگونه شیئی متعین دیگر.

ب - اعمال (Operations) ضوابط و ضروب مختلف برای تشکیل اصطلاحات تازه.

ج - ضوابط تصویر (Rules of Formation) ضوابط ساختمان اصطلاحات

تازه.. مثلا":

$$\exists R: \{R_i\}, \{x_i\}, \alpha: R \times X \rightarrow x_1 \in R_1, x_2 \in R_2, \dots$$

۲- گزاره های مقدماتی (Elementary Propositions)

احصاء حطیات گوناگون، یعنی X ، Y ، است، و غیره: $p_i = x_i \in R_i$

۳- قضایای مقدماتی (Elementary Theorems)

الف - اصول متعارف. یعنی گزاره های مقدماتی که علی الاطلاق وجود دارند.

ب- ضوابط شیوه های استنتاج (Rules of Procedure) p_1, \dots, p_n

قضایای مقدماتی هستند، مشروط به شرط δ_i و اگر Q یک گزاره مقدماتی

است در رابطه p_i به p_1, p_2, \dots, p_n پس Q صادق است.

(تدرک می دهیم که کلیه اشکال قیاسی منطق یک چنین صورتی را دارند).

برای اینکه فرضا درباره یک شیئی ریاضی بتوان تصمیم گرفت، که آیا داخل در یک

دستگاه صوری هست یا نه، باید سلسله مراحل تصمیم گیری محدود باشد. عبارت دیگر،

محدود یا متناهی بودن دستگاه صوری یکی از شروط اصلی برنامه صورت گزائی است.

موفقیت هیلبرت در قالب ریزی حساب مرتبه اول نقطه اوج مبانی صورت گزائی بشمار می

آید، ولی اثبات قضیه عدم تمامیت توسط گدل ضربهای بنیانی به پیروان مکتب

هیلبرت وارد کرد و سئوالهای اساسی و فلسفی را در مورد ریاضیات، و علی الخصوص در مورد

ریاضیات بعنوان علم دستگاههای صوری و ریاضیات بعنوان یک دستگاه منطقی صرف،

عنوان نمود. از نقطه نظر مبانی فلسفی ریاضیات این نکته حائز اهمیت فراوان است،

چون می توانیم با قطعیت بگوئیم که تنها قالب ریزی، نظام پردازی، اصل متعارفی

کردن و اصول منطق را اصل قراردادن برای ساختمان ریاضی کافی نیست، و همواره وجود

ریاضیدان و رابطه شهودی و بلاواسطه او با حقیقت قائم و مستقل از ذهن، در ساختمان

ریاضی ضروری است.

۲-۳- مبانی شهودگرای ریاضیات:

شهودگرایی فلسفی ترین و بااهمیت ترین مکتب مبانی ریاضیات است. نقش

تعقل و حدس فلسفی ریاضیدان نقشی است اساسی و برخلاف دو مکتب مذکور در بالا،

شهودگرایان بکلی امکان ساختمان ریاضی را توسط یک "ماشین" بر مبنای ضوابط منطقی

و صوری، رد میکنند. و ریاضیات را یک کنش فلسفی توسط موضوع مدرک میدانند، و نتایج این

کنش را کشف حقایق می شناسند، حقایقی که مستقل از اندیشه وجود دارند. و اصول شهودگرایی

توسط براوو به صورت دو کنش اصلی (بصورت بینش فلسفی) عنوان شده اند. اولین کنش

شهودگرایی، یا اولین بینش و کشف او، به کلی ریاضیات را از زبان ریاضی و از زبان منطقی جدا میکند، و در نتیجه ریاضیات شهودگرایی در اصل یک کنش ذهنی و ماسوای زبان است. و این کنش ذهنی مبتنی است بر تصویری از امتداد در زمان که توسط قوه حافظه در ذهن محفوظ میماند (کنش دوم)، و این دو کنش، حدسی بنیانی از ریاضیات است که ولو در بدو امر ریاضیدان از بیان آن قاصر است. تصویری است از چستی کل ریاضیات. به عبارت دیگر ریاضیدان شهودگرایی قائل باین است که ریاضیات دارای ماهیتی است قائم که در لحظات بینش فلسفی و یا تانات اشراق در ذهن او تصور میشود و از این طریق است که یک موضوع مدرک محدود با ماهیتی قائم و نامتناهی مربوط میشود. بنابراین ریاضیات، در اصل، هم از محسوسات مجزا است و هم از روابط منطقی، که مفاهیم و امکان بیان شدن مفاهیم را بهم مرتبط میکنند.

برنامه عملی ساختمان ریاضی در مبانی شهودگرایی برای بار اول توسط خود بر او و عنوان شد و سپس هی تینگ یکی از پیروانش این کار را دنبال کرد، و اخیراً یکی از فلاسفه انگلیسی بنام دامت این برنامه را گسترش داده است. در اینجا وارد جزئیات این برنامه نمی شویم، علی الخصوص که اخیراً دو مقاله در این زمینه چاپ شده است (بولتن شماره ۱۵ انجمن ریاضی). برنامه شهودگرایی از یک سلسله موجودات مجرد شروع میکند، مثلاً "از اعداد طبیعی، و نیازی برای قالب ریزی یک دستگاه قیاسی صوری برای بیان آن نمی بیند. برای شهودگرایان اصول متعارف پتانو صرفاً بیان نتایج بدیهی " ایجاد " اعداد طبیعی است، که بزعم آنها، مبتنی بر حدس فلسفی از وجود آن اعداد است. مبانی منطق شهودگرایی قانون ارتقاع نقیضین را که از قوانین سه گانه حاکم بر منطق دوارزشی، و از اصول منطق گرایان است. نفی میکند، یعنی:

$$\sim (\forall x(p(x) \vee \sim p(x)))$$

بنابراین $A \not\sim A$ و بطور کلی شهودگرایان اثبات های غیر مستقیم را در ساختمان ریاضی بکار نمی برند. این نکته خود از نقطه نظر فلسفه ریاضی حائز اهمیت است. چون اگر شهودگرایان عملاً توانسته باشند با انکار برخی از اصول منطق، ریاضیات را ساختمان دهند، عملاً نشان داده اند که فرایند اصلی منطق گرایان که ریاضیات را متاخر و مشتق از منطق میدانند، صحیح نیست.

بر تعریفی که منطق گرایان از عدد کرده اند، شهودگرایان اشکال اساسی می گیرند. چون بزعم شهودگرایان، تعریف ۲، ۳ و غیره تنها زمانی امکان دارد که ما مفهوم عدد را قبلاً "تحصیل کرده باشیم و نه اینکه توسط استقراء اعداد را تعریف کنیم. مثلاً "منطق گرایان

عدد ۲ را چنین تعریف میکنند:

$$2(P) \equiv (x)(y)[(P(x) \cdot P(y) \cdot x \neq y \cdot (z)(P(z)) \cdot z=x \cdot z=y)]$$

و چون شهودگرایان تجزیه ریاضیات را به منطق رد میکنند، تعریف اعداد را از این طریق، قولی که دلالت بر ماهیت عدد بکند، نمی دانند، لکن برای شهودگرایان اعداد حقیقی، که مبتنی بر کنش فلسفی در ذهن موجودیت می یابند، در عمل از طریق دو قانون بدست می آیند:

- ۱- قانون گستره ها Δ_M (Spread-Law) قانونی است که سلسله محدودی از اعداد طبیعی را بدو قسمت " قابل قبول " و " غیر قابل قبول " تقسیم میکند.
- ۲- قانون متمم T_M (Compl. Law) در هر مورد لازم یک شیئی معرف ریاضی را به سلسله محدودی از اعداد منسوب میکند.

۲-۴- نتیجه گیری:

قطعا " نتوانستیم در این مختصر به نتایج قاطع درباره مسائل فلسفه، ریاضی برسیم، ولی این خود یک نتیجه فلسفی است. اینکه صریحا " نمی توانیم قبول کنیم که: " آری ریاضیات یک نظام منطقی است قابل گسترش بر مبنای اصول و روابط منطق؟ " یا " آری ریاضیات یک نظام صوری است متشکل از احکام ریاضی که تنها دارای صورت هستند و هیچ گونه بیانی از حقیقت نیستند و هر آینه اثبات سازگاری قسمتی از گزاره های صوری را ارائه دهیم به نحوی به موجودیت آنها اشاره کرده ایم؟ " و یا " آری ریاضیات تمثیلی است از حقیقت قائم بالذات؟ " کدام واقعا " صادق اند، خود پیچیدگی فلسفه ریاضی را می رساند. ولی لااقل نتوانستیم عنوان کنیم که پاسخ مابه سؤال چیستی ریاضیات پاسخ ساده ای نیست و مستلزم بررسی دقیقی از اصول حاکم بر تفکر اتمان است.

فرگه اولین کسی بود که نیاز بررسی معرفت ریاضی را عنوان کرد و اولین کسی بود که اصول فلسفه ریاضی را تدوین نمود (که پس از او راسل آنرا بصورت یک برنامه کامل در آورد). هیلبرت و براور نظام های متفاوتی را بنا کردند و نشان دادند که نمی توان یک فلسفه ریاضی را حاکم بر ریاضیات دانست و شاید معانی نهائی و مبانی نهائی ریاضیات همواره بصورت سؤال باقی بماند، لکن کنش ریاضی همواره یکی از ارکان مسلم تعقل بشر باقی خواهد ماند و مانند هر گونه تعقلی همواره بازمان تغییر خواهد کرد، و ریاضیات شیوه ای دقیق، زیبا و منظم، برای کشف حقائق و بیان آن در رابطه متقابل با عناصر متشکله موجودات در هر مقطع، زمانی که تعقل در آن صورت بگیرد، خواهد بود.

۳- تاثیر نتایج ریاضی بر فلسفه:

قبلا" اشاره کردیم که یکی از مباحث فلسفه ریاضی بررسی نتایج فلسفی قضایای ریاضی است. در تاریخ فلسفه گزارا" به مواردی بر میخوریم که تفکر فلسفی تحت تاثیر مستقیم ریاضیات بوده است. مثلا" افلاطون از پنج شکل منظم هندسه اقلیدسی در بیان چستی ماده، و بررسی ماده المادهستی، استفاده کرده است. دنباله 2^{n-1} مبنای بیان تشلی کثرت انوار مجرد در حکمت اشراقی است، و غیره. اخیرا" سه قضیه مهم در ریاضیات اثبات شده اند که تاثیر آنها بر اندیشه فلسفی میتواند گویای چند ساله اصلی در وجود باشد. در این مختصر فرصت بررسی عمیق این سه قضیه را نداریم ولی شمه کوتاهی از آنها را بیان خواهیم کرد، بیشتر از این نقطه نظر که به رابطه متقابل فلسفه و ریاضی اشاره کرده باشیم.

سه قضیه مورد اشاره عبارتند از:

۱- اولین قضیه عدم تعامیت گدل: یک محمول وجود دارد که هیچ نظام کامل صحیح صوری برای بیان آن وجود ندارد.

۲- قضیه چرچ: یک محمول وجود دارد بطوریکه هیچ دستگاه صوری صحیحی را نمیتوانیم در نظر بگیریم که شامل شیوه‌ای برای تصمیم گیری درباره آن محمول و نقیض آن باشد.

۳- قضیه اسکولم: هیچ دستگاه سازگار جزمی صوری وجود ندارد که بتواند اعداد طبیعی را به نحوی بیان کند.

متوجه می‌شویم که هر سه قضیه بنحوی به محدودیت تعقل بشر اشاره میکنند. از قضیه گدل میتوانیم نتیجه بگیریم که هیچ گاه انسان نمی تواند طبق یک برنامه مشخص (مثلا" یک نظام صوری) همواره احکام صادق و تنها احکام صادق را بیان کند. از قضیه چرچ نتیجه می‌گیریم که همواره مجموعه‌ای از مسائل حل ناپذیر بی‌شروع وجود دارند، و از قضیه اسکولم نتیجه می‌گیریم که هیچ انسانی قادر به بیان کامل اعداد طبیعی نخواهد بود. قصد ما چیست؟ و اصلا" محدودیت تعقل در بشر آیا خود امری بدیهی نیست؟ یک نتیجه پایه: تعقل مطلق ممتنع است، و همواره برای انسان مجهولات وجود خواهند داشت. البته ممکن است چنین نتیجه‌ای را بدون دردست داشتن قضایای مذکور بتوانیم عنوان کنیم، ولی قدر مسلم این است که براهین اقامه شده، قبول عدم تعقل مطلق را استوارتر می‌سازد و هر چند در علم المعرفت قائل باشیم به این که انسان بعنوان یک جوهر اندیشمند قادر به تصور لایتناهی است، ولی با این براهین درمی یابیم که هیچگاه قادر به تعقل

لایتناهی نخواهد بود .

در پایان این پیشگفتار، بی مناسبت نمی دانیم که یکی دوسه نکته جزئی ویدیهی را در محضر خواننده صاحب نظر عنوان کرده باشیم، تا خدای ناکرده شائبه آن نرود که ما را در بساط نکته دانان ادعای فضلی هست، که اگر باشد، هم عیبی نیست، از جمله آن نکات که در این وجیزه رقم تذکرمی پذیرد، یکی آن است که مضامین مندرج در این مجموعه - هر چند که در نوع خود تازه و برای بازار کتاب ایران نو برانه، و نیز حائز سطحی و شانی در منازل مباحث علمی - به هیچ روی به قصد آنکه در محضر استادان فن، شرف مطالعه بیاید صورت تالیف نپذیرفته و تنها بدین منظور - و با این امید - چاپ و پخش شده است تا دانشجویان رشته های فلسفه، و مبانی و فلسفه ریاضی را محل استفادتی باشد، که مجموعه مقالات آن، پوشش نسبتاً جامع و شاملی به مباحث اصلی فلسفه ریاضی میدهد، و برای یک ترم در یک درس فلسفه ریاضی، میتواند مورد استفاده قرار گیرد. نیز، تا این کتاب بتواند برای خواننده حیز استفادتی بیاید، از جمله حداقل لوازم حصول به محتوای آن، آشنائی با ساختمانها، و روشهای اثبات و ... سطوح بالای ریاضی است و آشنائی و الفت با حداقل مقدمات منطق ریاضی. دیگر عرض این معترضه است که بدون شک اشتباهات ما از نظر صائب اصحاب نظریه و رنمی تواند ماند، اینست که پیشاپیش از تصور خود عذر می خواهیم و هم از ذوات بزرگوار امید به اغماض و تساهل داریم و ارائه راههای صواب و سزاوار.

حسین ضیائی