بنام خداوند جان وخرد

دیباچه

تامجموعهٔ مقالات حاضربصورت کتابی که درپیش روی دارید ، درآید ، دوسالی می بودکه من بنده ، **حسین ضیائی** ، در **دانشکدهٔ ریاضی** ، **دانشگاه صنعتی** به تدریس *فلسفهٔ ریاضی* اشتغال می داشتم . دراین دوره، علاقمندی دانشجویان این درس ، شوقی درماانگیخت ، وبرآن شدیم که سلسله‌ای ازمقالات رادرموضوع *فلسفهٔ ریاضی* ، وازآثارمعاریف این حوزهٔ فکری ، بفارسی برگردانیم . تااین اندیشه جامهٔ عمل بپوشد، درعهده گرفتیم که مقالاتی دراین زمینه راانتخاب کنیم وبرای ترجمه به دانشجویان این درس بسپاریم وخودنظارت وارائه طریق به ایشان را تقبل کنیم .حالی ازمیان آن ترجمه‌ها، تعداد۹ عنوان را، که بیشتربامضمون کتاب حاضرمتناسب و همخوان بود،برگزیدیم ویک‌مقاله هم، که خودبه‌فارسی گردانیده‌ویکباردرشمارهٔ ۹ **بولتن انجمن ریاضی ایران** چاپ شده بود، به این مجموعه برافزودیم . دنبالهٔ کار را که عبارت می بودازویرایش ومقابله ویکدست کردن زبان ترجمه‌هاوانتظام وانسجام و یکنواختی معادل فارسی اصطلاحات وتهیه واژه‌نامه‌هاوغیرآن، آستیم درعهده گرفت و با کنکاش مداوم باما، کتاب حاضررابه این سامان رسانید . وفروتنی وفراتنی را انصاف می دهیم که حاصل زحمات ماکتابی نیک ودرخور شده‌است، وخدای راازهرجهت سپاس می گزاریم .

برای تایپ متن حاضربا "کمپوزر" ، خانم **عصمت رستمی**زحمت کلانی رامتحمل بوده‌اند، دستشان دردنکندواجرشان باحق وبرماست که زحمات زیادایشان راقدر

بشناسیم . واژه نامه‌های " فارسی ـ انگلیسی " و " انگلیسی ـ فارسی " را وفهارس کتاب را خانم شمیلا کام‌فر ، بادقت کامل تهیه کردند . به شرح ایضا " اززحمات ایشان امتنان داریم . آقای مرتضی کریمی ، درمقام ویراستارفنی ، کارآرایش وآماده سازی کتاب راعهده داربودونهایت ذوق ودقت درکارآورد . شکرالطاف او همواره درعهدهٔ ماست . دیگرازمراحل پرزحمت ومرارتبار ، تنظیم وتعبیهٔ فرمولهاوعلائم ریاضی متن بوده است که ماخود ، من و آستیم ، این وظیفه را ، علاوه برباززخوانی های مکرر ، انجام داده‌ایم وشکرتوفیق می گزاریم .

هم برعهدهٔ ماست تااز مرکزایرانی مطالعهٔ فرهنگهاقدردانی کنیم ، که مراحل تایپ وآماده‌سازی وغیره ، بااستفاده ازامکانات وتسهیلات آن مرکزانجام پذیرفته است .

حسین ضیائی

پیش گفتار (۱)
معرفی مکتب های فلسفهٔ ریاضی

۱ــ مقدمه

فلسفهٔ ریاضی پژوهشی است دربارهٔ مبانی ریاضیات ، وعلمی است که ،مبتنی بر روش تحلیلی فلسفی ، میکوشدبه سوالهای چیستی (ودیگر *مطالب* اصلی) درریاضیات پاسخ دهد. دربدومقال‌بدین نکته بایداشاره‌کنیم :همانگونه که مثلا" فلسفهٔ فیزیک به نظریات وقضایای علم فیزیک *اضافه* نمی کند ، همانگونه هم فلسفهٔ ریاضی به قضایا ونظریات علم ریاضی *اضافه* نمی کند ، بلکه دربارهٔ قضایا ، نظریات ، وبطورکلی ساختمانهای ریاضی وسیرتطوروتحول آنهاتحقیق میکند . اماهمواره فلسفهٔ یک علم باعث تحولات اساسی وبنیانی درآن علم میشود ، گواینکه بسیاری ازریاضی دانها معتقد نیستندکه فلسفهٔ ریاضی به پیشرفت فنون ریاضی کمک میکند . اهمیت فلسفهٔ ریاضی ، اما ، برای متفکران ریاضیدان واهل فلسفه همواره مشخص بوده ، واز دوران اوائل تدوین وبیان فلسفه وریاضیات ، علمای این دوعلم حتی قائل به نوعی وحدت مابین فلسفه وریاضی بوده‌اند . درعالمی که هستی رابه بودن وشدن تقسیم کرده‌اند ، حقائق ریاضی مبراازتغییرومتعلق به بودن شناخته میشوند ، واین خوددرفلسفه ارزش بسزائی دارد : این چگونه علمی است که قضایای آن ربطی به تغییروکون وفساد موضوع

۱ــ برخی ازمطالب این پیش گفتار درمقالهٔ : *بحثی اجمالی پیرامون مسائل مبانی و فلسفهٔ ریاضی* ، مجلهٔ علمی الگوریتم ،شمارهٔ ۲ (۱۳۵۸)تالیف حسین‌ضیائی ،قبلا" بچاپ رسیده است .

ندارد ، بررسی چگونگی یک چنین نکتهٔ اصلی درزمرهٔ مسائل فلسفهٔ ریاضی است .

فلسفه همواره باسئوال آغازمیشود. درطی تاریخ ، نظام‌های فلسفی متشکل بوده است ازمجموعهٔ پاسخ‌های افرادی که بااین علم سروکارداشته‌اند . اکثرسئوال‌ها ، ازهمان بدوشروع به تفکرمنظمی‌که فلسفه نامیده‌شده است تاکنون، به قوت خود باقی هستند ، تنهاپاسخ هاتغییرپذیرفته‌اندوکامل ترشده‌اند. مثلا" سئوال "عددچیست؟" حداقل اززمان فیثاغورث تاامروزیکی ازسئوال‌های اصلی فلسفهٔ ریاضی بشمارمی‌آید . جنبه‌های این‌سئوال: " آیاعددمفهوم وتصوری است کاملا" مجردازماده که وجود آن تنهادرذهن متحقق میگردد؟" و " آیاعددمنتزع ازماده است ولی دردنیای خارج از ذهن مصداق می یابد؟" ، و" آیاعدد درجه‌ای است ازتجلی حقیقتی مثالی که والاتر از ذهن بشراست؟ " و "آیاعددصورتی است ساختهٔ ذهن بشرداخل درنظام بدیهی و یاموضوعی واصل متعارفی ، که آنهم ساخته ذهن است؟". پاسخ به اینگونه سئوال‌ها و جوانب مختلف آنهادرطی سالیان درازتاریخ ریاضیات همواره ذهن متفکران رابخود مشغول میداشته ودرضمن سازندهٔ نظریه‌های مکتب های مختلف مبانی ریاضیات بوده است . باآندک تامل درماهیت اینگونه سئوال‌هامیتوانیم نتیجه بگیریم که نه تنها دربارهٔ اکثرمفاهیم ریاضی بلکه دربارهٔ خودمفهوم ریاضی نیزمیتوان ازاین قبیل سئوال‌هامطرح ساخت . قدرمسلم این است که می توانیم تعدادبیشماری پرسش فلسفی درباره ریاضی ومسائل جزئی ریاضیات مطرح کنیم ولی برای اینکه بتوانیم به نتیجه برسیم وبتوانیم حدودمعینی رابرای پاسخ هایمان مشخص کنیم ، بایداصول ومبانی سئوالهاراپیداکنیم ؛ واین خودمستلزم آن است که اصول نظریاتی رابنیان بگذاریم که سئوال های مختلف برآن متکی می توانندبود. بطورخلاصه اگرقائل به تعریف کلی از فلسفه : که " تحقیق درباره ماهیت اشیاء بقدر طاقت بشر" است ، باشیم ، وجود ، حقیقت ، امتدادمقولاتی ورابطهٔ اشیاء ریاضی رادرارتباط باموضوع مدرک (مثلا" خود ریاضیدان) بایددرفلسفهٔ ریاضی موردبررسی قراردهیم . البته دید فلسفی ما یقینا" بر نحوهٔ تحلیلی که از وجود وحقیقت اشیاء ریاضی انجام می دهیم تاثیرمی گذارد .و مثلا" اگردیدکلی ماازشناخت دیدی *اشراقی* ، *آرمان گرای یاواقع گرای* باشد ، مسائلی راکه مربوط به شناخت اشیاء ریاضی میشوند، به شیوهٔ خاص مبتنی بردیدکلی فلسفی بیان خواهیم کرد .

پس ازیک سوفلسفهٔ ریاضی تحقیقی است فلسفی ازریاضیات،امااززسوی دیگر، چون فلاسفه همواره شیفتهٔ دوجنبهٔ کلی ریاضیات یعنی نظام‌پردازی ودقت ساختمان

قضایای ریاضی (مسلم‌بودن نتایج دستگاههای اصل متعارفی) بوده‌اند، نتایج ریاضیات همواره درخودبینش فلسفه وشیوه تحلیل فلسفی تاثیرزیادی گذاشته است. البته خودمساله نظام پردازی درریاضیات دامنه وسیعی داردکه محتاج به توضیح نیست و روش اصل متعارفی که درریاضیات تااین اندازه پیشرفته است، دارای مبانی فلسفی است ومنتج ازسئوالهائی است که دراصل شناخت وسپس ازشناخت ریاضی مطرح شده است. مانیزچنانچه بخواهیم بطورمنظم پیش رویم اولین مساله‌ای راکه بایدطرح کنیم (واین مساله‌ایست که همواره درحیطهٔ ریاضیات مطرح شده است) مساله بررسی ریاضیات ازنقطه نظرشناخت شناسی است، ودر بدو شروع به چنین بررسی‌ای مساله ماتقدم بودن مفاهیم ومعرفت های ریاضی پیش می آید. جای تعجب نیست که اکثر فلاسفه وبخصوص کانت که این مساله رابطورمنظم بررسی کرده بود، ریاضیات را معرفتی ماتقدم وازپیش موجود.می دانند. ولی اخیرا" برخی ازریاضیدانهاکه گرایشی به مطرح کردن سئوالات فلسفی در ریاضی دارند، مثلا" فرگه و راسل سعی کرده‌اندکه با ارائه دادن تحلیلات منطقی دربارهٔ مفاهیمی مانندمجموعه واعدادطبیعی ریاضیات را به نحوی، داخل درقلمرومنطق بدانندومنطق راهم روابط بین صورتهای ساختمان پذیرفته درنظام‌های مختلف قلمدادکنند (یعنی قائل بوجودمستقل ریاضی نیستند). پس مساله معرفت ماتقدم ومعرفت ماتاخروتجربی مساله‌ایست فلسفی، هم دررابطه بامفهوم ریاضی بطورکلی، وهم در رابطه بامفاهیم جزئی ریاضی.

سیرتکامل ریاضیات جدیدبخصوص بادرنظرگرفتن جنبه تجردو وابستگی آن به دانش مجموعه‌ها همراه بامسائلی بودکه به *افلاطون‌گرائی*موسوم هستند. درطی قرن نوزدهم ریاضیدانهادرتنظیم قضایای حساب وآنالیز، که برمبنای اصول متعارف بنا شده بود، ودرراه استوارساختن قضایای آنالیزوحساب برمبنای نظریهٔ اعداد طبیعی از دیدگاه *افلاطون گرائی* کوششهائی مبذول داشتند. دراین موردکارهائی که **کانتور** درمجموعه‌هاانجام داداصول این نظام پردازی درریاضیات راپی ریخت که جهتی به سمت تجردهرچه بیشتردرریاضیات داشت وشامل فرضیات *افلاطون گرائی* بود. بحث درمساله *افلاطون گرائی*بالاگرفت وسه نظریه مختلف به میان گذاشته شد. حادترین این سه نظریه، که بامخالفت بانظریه کلی *افلاطون گرائی*برخاست، شهودگرائی است که بانی آن **براور** ریاضی دان معروف هلندی بود. درمقابل این نظریه، روش **هیلبرت** قرارگرفته است که به نام **صورت گرائی** معروف شد، ونظریه سوم **منطق گرائی**نام دارد که برپایه نظریات **فرگه و راسل** استوارگشته.

یکی ازمهم ترین مسائل فلسفه ریاضی سئوالی است درباره ارتباطریاضیات با تجربه واین سئوالی است که از زمانهای قدیم مطرح شده است . بدین معنی که آیا ریاضی علمی است ماتقدم که ما سوای تجربه در وحله اول، وماسوای درک وتجربه موضوع مدرک دروحله دوم ، تحقق می پذیردومنتظم میشود؟ یااینکه، آیاریاضی علمی است برمبنای تجربه موضوع مدرک (چه درذهن وچه درحس ویاهردو) ؟البته پاسخ کاملی رانمی توانیم ارائه دهیم که بتوان آنراثبات کردواحیانا " آنرابعنوان فرضیه‌ای قبول نمود، ولی بررسی این مساله ازدیدگاههای مختلف فلسفی ومبانی ریاضی نمایانگرجوانب این مساله است ومارابانحوه تفکروشیوه‌های مختلف تحلیلی فلسفی ـ ریاضی درجهت بررسی این مساله آشنامیسازد. بایدمتذکرشدکه درریاضیات عملی ودر علوم عملی بطورکلی چنین سئوالهای انتزاعی درسازگاری ونتیجه گیری الزاما " راهی ندارد. ومثلا" برای یک فیزیک دان که از ریاضیات دراندازه گیری پدیده‌های طبیعی استفاده میکندسئوال اینکه آیا $a = b$ و $b = c$ پس $a = c$ امری است بدیهی ویااینکه اصلا" موضع بدیهیات دریک نظام اصل متعارفی وارتباط آن بااصول موضوعه چیست ، ممکن است سئوال بی موردی باشد. وشایدبعضی ریاضیدانهاقائل باین باشند که ریاضیات بدون بررسی سئوالهاومسائل مبانی وفلسفی بکارخودادامه خواهد داد و سازگاری خودرا ازدست نخواهدداد، ومطرح کردن یامطرح نکردن سئوالات فلسفی پیرامون چیستی وحقیقت ریاضی ربطی به " پیشرفت " ریاضی نخواهد داشت . البته موضع فلسفی وموضع ریاضیدانهائی مانندفرگه،کانتور،براور، هیلبرت ، وغیره ازیک سووفلاسفه بطورکلی این است که " پیشرفت " د.ریاضیات محض باکاربردویاعدم کاربردمطالب مربوط نیست .

مساله حقیقت درریاضیات نیز، که یکی ازاساسی ترین مسائل فلسفی ـ ریاضی است ازنقطه نظربرخی ریاضیدانان صرفا" دررابطه بااستحکام اثبات هائی ازصدق گزاره‌های ریاضی عنوان میشود. اینگونه ریاضیدانهاضمن اظهاراینکه ریاضی علم نیست معتقدندکه حقیقت ریاضی صرفا" بیانی است ازشیوه‌های اثبات انتخاب شده درحل مسائل ، ولی اکثرریاضی‌دانهائی‌که قائل به گویابودن موضع فلسفی- ریاضی‌هستند اعتقاددارندکه ریاضی علمی است دارای موضوع خاص ونتایج حقیقی فراگیر ودارای ماهیتی مشخص که والاتروعمیق‌تراست ازصرفا" روابط منطقی بین گزاره‌های صوری، یعنی حقیقت ریاضی راصرفا" یک حقیقتی منطقی نمی دانند..

۲ـ مکتب‌های مبانی ریاضی :

۲ـ۱ـ مبانی منطق گرای ریاضیات :

لایبنیتز فیلسوف شهیرآلمانی که یکی ازبنیان گزاران منطق ریاضی بشمارمیرود مصرا" قائل باین بودکه نظام های ریاضی میتوانندقالب خوبی برای مبانی تفکرباشند، واین دیدگاه پیروان زیادی یافت . ولی نظریه دیگراوکه حقائق ریاضی ومنطق هردورا مبتنی براصل تناقض $(\forall x \sim (p(x) \wedge \sim p(x)))$ میدانست، هرچندیکی از اصول *منطق گرائی* است ، دردیگرمکتب‌های مبانی ریاضی پیروان چندانی نیافت . این نقطه ـ نظر منجربه این میشودکه کلیه حقائق ریاضی ومنطق درنهایت امرقابل به تجزیه به *گزاره‌های یکسان* هستند واین‌عمل تجزیه شامل تعدادمحدودی ازمراحل است. مثلا" ماهرآینه مواجه بایک بیان ریاضی $\phi(x_1)$ شدیم الزاما" خواهیم توانست پس از مراحلی محدود، α_n , $\phi(\alpha_n : |n| < \infty)$ رابه یک *گزاره یکسان* یایک همان گوئی منطقی تجزیه کنیم : مثلا" به گزاره‌ٔ مرکبی مانند $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ که همواره دارای ارزش یکسان است، بدون توجه به ارزشهای جداگانه اجزاء متشکله آن (p, q, r) بعبارت دیگراین‌نظریه قائل باین است که تمام ریاضیات رامیتوان برمبنای تعدادی گزاره‌صادق منطقی برمبنای اصول منطق (یعنی ماسوای تجربه ذهنی مرحله به مرحله ازاثبات وساختمان ریاضی توسط ریاضیدان) بنانمود. *منطق گرایان*باکوشش فراوان سعی کردنداین برنامه رادر ریاضیات به مرحله عمل درآورندوریاضیات رابرمبنای روابط اصلی منطقی وگزاره‌های همواره صادق بنانمایند. البته نظریه *گزاره‌های‌یکسان*مانندنظریهٔ *گزاره‌های‌تحلیلی* کانت بسیارساده‌ترازآن است که بتوان کلیه ریاضیات رابرمبنای آن بنانمود، وانتقاد اصلی برمنطق *گرایان*این است که خوداصل تناقض یک گزاره یکسان‌وبه‌اصطلاح کانت یک *گزاره ماتقدم تحلیلی* است، علی‌الخصوص که اصول منتج ازاصل تناقض $A \to \sim\sim A$ و $\sim\sim A \to A$ ضروری، (به معنای اصلی فلسفی ضرورت) نیستند، چون درنظام‌های منطقی چندارزشی اصولی مانند $\sim\sim A \to A$ به کنارگذاشته میشوند. بعبارت ساده الزاما" درساختمان ریاضیات نمی توانیم شهودوتعقل بلاواسطه ریاضیدان راکلا" انکار کنیم .

موضع *منطق گرائی* توسط فرگه، راسل وپیروان آنهابصورت یک برنامه عملی درآمد .

فرگه توانست بجای مفهوم *گزارهٔ یکسان* ــ که دربدوامرچیزی جزنشان دادن شمول محمول درموضوع $\forall x(Px \longrightarrow Qx) \longrightarrow Q \varepsilon P$ نمی بود ــ مفهومی منسجم تروگویاتر تحت عنوان *تحلیلی*به کاربرد (این مفهوم برابراست باکاربرد دقیق نوعی خاص ازاستلزام : گزاره‌هائی بعنوان *اصل* موردقبول هستندکه بتوان آنهاراصرفاً " ازقوانین اصولی منطق وتعاریفِ مربوط به آنهااستنتاج نمود.) ونیز **فرگه** موفق شدکه بزعم خودش ، تحلیل وتجزیه حقائق ریاضی راازطریق اقامه اثبات برای تحلیلی بودن گزاره انجام دهد. ازاین طریق **فرگه** ومنطق گرایان توانستندنشان بدهندکه علم حساب (حداقل درمرتبه اول) دارای خاصیت خاص تحلیلی است که خودمبتنی است برقوانین اصل منطق . یعنی مثلاً " $p_i(x)$ رابتوان درنهایت امربه P که *گزاره‌ای همسان* و *تحلیلی* ویکی ازقوانین کلی‌منطق است تبدیل نمود (بااستفاده از ۱ــ تبدیل یک نظام علامتی بدیگری : ۲ــ تنهااستفاده ازضوابط مسلم ومفروض نپنداشتن گزاره‌هائی که اثبات نشده‌اند) :

$$p_i(x), \beta_i : \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\beta_i \longrightarrow P$$

تحلیلی بودن علم حساب ، چنانچه *منطق گرایان* نشان داده‌اند ، بریک پیش فرض بسیارمهم استواراست : قوانین کلی منطق بدیهی هستند. پس آغازساختمان ریاضی به نحوی با فطرت انسان آمیخته است. چون امربدیهی بلاواسطه ودفعتاً " مدرک است ، و تعقل فطری انسان درچنین تحرک ادراکی دخیل است وچون فطریات ازجمله اموری هستندکه وجودآنها قائم برادله مابعدالطبیعی است (مثلاً " بحث واهب الصور دروجود فطریات) ، پس ساختمان ریاضی نمیتواند صددرصدامری مکانیکی ــ منطقی باشد. این نکتهٔ مهم را *منطق گرایان*بکلی نادیده گرفته‌اندواصولاً " اشاره‌ای به چگونگی فطری بودن قوانین کلی منطق نکرده اند.

منطق گرایان دراثبات تحلیلی بودن علم حساب ، محتاج به یک سلسله تبدیل علائم‌اند. درمرحله اول تبدیل علائم *الفاظ* (ودرحالت ترکیبی ،*احکام*)نمادین شده صرفاً " منطقی هستند. مثلاً " علائم متغییرات گزاره‌ها ($p, q, r, s, t, \ldots\ldots$) وعلامت عطف ($\wedge$) ، وعلامت فصل ($\vee$) ، وعلامت سلب ($\sim$) وغیره . ولی احکام نمادین شده درمراحل نهائی الزاماً "شامل‌علائمی خواهندبودکه برحسب‌ظاهر ، منطقی بودن آنهاضروری نیست ، وتنهاپس ازاقامه براهین ، منطقی بودن آنهاتثبیت میشود. پس دریکی ازمراحل اثبات ــ ازمقدمات تانتیجه ــ تبدیل علائم منطقی صرف به علائم دیگرصورت میگیرد ، دراین مرحله تعریف ، وحد منطقی ، نقش مهمی راایفامیکند. ودر

اینجااساسی‌ترین تمایزداخلی، درنظام‌مبانی‌*منطق گرای* ریاضیات، وجوددارد، یعنی تمایزبین نظریه **فرگه** ازیک‌سوونظریه **راسل** ازسوی دیگر: نظریه **فرگه**درباره **تعریف** و حد منطقی نظریه‌ایست *واقع گرای*، یعنی حدمنطقی راقولی که دلالت برماهیت بکند میداندودرنتیجه قائل به ماهیت قابل اشاره ازبرای اشیاء ریاضی معرف است ؛ ونظریه **راسل** نظریه‌ای است *نام‌گرای* یعنی **تعریف** راصرفا" وسیله‌ای برای تبدیل یک سری علائم به علائم دیگرمیداند. برای **راسل** **تعریف** صرفا" بیانی است ازترکیب تازه‌ای ازعلائم برمبنای ترکیبی ازپیش شناخته شده، وبنابراین تعریف رادراصل قولی که دلالت برچیزی بکندنمی داند، بلکه تعریف راقولی میداندداراي قابلیت ایجاد تسهیل درمراحل اثبات. برمبنای چنین نظریه‌ای **تعریف** نوعی اختصاردربیان مطالب دانسته شده است وبرای **راسل** **تعریف** یک عددخاصی (مثلا" وقتی می گوئیم تنها عددی که فلان خاصیت رادارد)، بایک طبقه ازاعداد(مثلا" طبقه اعدادصحیح تقسیم پذیربه دو) بیانی است ازچیزهائی صرفا" منطقی، غیرمادی وذهنی. نظر **راسل** دراین موردپیروان زیادی نداردوموضع خادی از*منطق گرائی*است. ولی موضع **فرگه**. که بر بینش فلسفی عمیق‌تر دلالت میکند، پیروان بیشتری دارد. **فرگه**معتقد است که اعداداشیاء منطقی هستندوهدف فلسفهٔ ریاضی این است که آنهارامشخص کنده البته، بزعم **فرگه** تعریف عددمترادف با خلق آن نیست بلکه تحدیدچیزی است که استقلال وجودی دارد. برای **فرگه** تعریف عددازطریق متمایزکردن‌آن دریک مرحله ساختمان ریاضی کافی نیست ، ونیزنمیتوان عددرابعنوان یک اصل موضوعه تعریف کرد. بایدعددراازطریق تعریف مشخص نمودوبایدتعریف قولی که دلالت برماهیت میکند باشد، ودرنتیجه بایدوجودعددازطریق تعریف بیان‌شود. تعریف **فرگه** ازعدد بسیارمشهورومفصل است ودراین مختصرمجالی برای بیان آن نداریم ولی اصل حاکم برنظریه **فرگه** چنین است :

بیان: تابع $\Phi(\xi)$ دارای بردارزشهای یکسان باتابع $\Psi(\xi)$ استرا مترادف بابیان: تابع $\Phi(\xi)$ وتابع $\Psi(\xi)$ درازای احکام‌همسان ارزش‌برابردارند میداند. تابع $\Phi(\xi)$ چنین است که ξ هاتوسط اشیاء ریاضی موردنظرپرمیشودو $\Phi(\xi)$ را**فرگه**یک مفهوم میداننداگردرازای تبدیل اشیاء ریاضی به ξ حکم بدست آمده یک گزاره صادق (یاکاذب) باشد.

دربالامتذکرشدیم که *منطق گرایان*دربرنامه ساختمان ریاضی ، برمبنای اصول کلی ریاضی، ازگزاره‌های *همواره صادق* استفاده میکنند. بعبارت دیگرگزاره‌های همواره

صادق یاهمان گوئی های منطقی دربرنامه منطق گرایان بعنوان مقدمات مسلم دراقامه براهین استفاده میشود. این چنین گزاره‌هائی ازطریق بررسی توابع صدقی بدست می‌آیند. مثلاتابع صدقی $\mathcal{F}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ منطقا" ضروری است اگروتنهااگرارزش کلی آن درازای ارزشهای متفاوت $p_1, p_2, \ldots, p_n$ همواره صدق باشد. مثلا" گزاره مرکب $\sim(p \wedge \sim p)$ همواره صادق است ویاگزاره $((p \to q) \wedge p) \to q$ همواره صادق است (چه p و q صادق باشندوچه کاذب). توابع صدقی رامبنای ثوابت منطقی پنج گانه: رابطه عطف $\wedge$، رابطه فصل $\vee$، رابطه لزوم $\to$، رابطه سلب $\sim$، رابطه لزوم دوطرفه $\leftrightarrow$، می شناسیم وبیان می کنیم. مثلا "تابع صدقی عطف، که برای دو متغیر دارای چهارحالت است:

(T علامت صدق، F علامت کذب)

$$\wedge(p,q)\begin{cases}\wedge(T,T) = T\\ \wedge(T,F) = F\\ \wedge(F,T) = F\\ \wedge(F,F) = F\end{cases}$$

تنهادریک مورد منطقا" ضروری است. بعبارت دیگردرساختمان ریاضی، ماازتابع ($p_1, p_2, \ldots, p_n$) بعنوان یک مقدمه مسلم، تنها درموردی میتوانیم استفاده کنیم که کلیه p هاصادق باشند. مثال دیگرتابع صدقی فصل است (برای دومتغیر)

$$\vee(p,q)\begin{cases}\vee(T,T) = T\\ \vee(T,F) = T\\ \vee(F,T) = T\\ \vee(F,F) = F\end{cases}$$

متوجه می شویم که ازچنین تابعی درمواردمتعددتری میتوانیم بعنوان یک تابع منطقا" ضروری استفاده کنیم، یعنی $\vee(p_1, \ldots, p_n)=T$ اگر $\exists p_k : p_k = T$ (یعنی تنها یک گزاره صادق). ارزش توابع منطقا" ضروری دربرنامه منطق گرائی کاملا" مشهود است، چون طبقه توابع صدقی همسان یاهمواره صادق کاملا" تعریف شده‌است؛ وچون صرفا "ازطریق یک شیوه مکانیکی میتوان توابع صدقی همواره صادق راشناخت. چنین توابعی، تماما" بعنوان مقدمات مسلم، دربرنامه منطق گرائی وساختمان ریاضی، برمبنای اصول منطق استفاده میشوند. ولی درساختمان ریاضی منطق گرایان احتیاج به مقدمات دیگری دارندودراینجاست که ضعف برنامه آنهادیده میشود. خودشیوه ساختمانی

مورد استفاده راسل درکتاب معروفش *اصول ریاضیات* شیوه ساده‌ای است:
درابتداازمجموعه‌ای، مثلا" S ،که علم بدان داریم شروع میکنیم،دربدوامرشواهد چنین‌اقتضامی کنندکه S راقبول کنیم ، ولی بامشکلات زیر روبرومیشویم : ۱ــ ادعاهای شناخت مربوط به S رابه سهولت نمی توانیم قبول کنیم (مثلا" آیاصحیح است که $(\forall a, \forall b: a,b\varepsilon S)$; ۲ــ مسائل حل ناشده در S وجوددارند (مثلا" آیاصحیح است که $(\forall a, a\varepsilon S: \exists e: e\varepsilon S \rightarrow a.e = e.a)$;
۳ــ درباره وجودعناصر نمیتوانیم تصمیم قاطع بگیریم (مثلا" آیاصحیح است که $(\forall a, a\varepsilon S: \exists b, b\varepsilon S \longrightarrow a.b = b.a = e)$;
شیوه ساختمانی موردنظرراسل‌درچنین مواردی S رابرمبنای مجموعه ازپیش بیان شده درنظرمیگیردو*بنا* میکند (مثلا" S رادرمقابل یک گروه‌آبلی G بیان میکند) .
اشکال عمده راسل ،اما ،درو*جودبینهایت*است : آیابایدوجودبینهایت راامری بدیهی بدانیم؟ وموضع آنراهمانندیگراصول بدیهی منطق مانندعطف، فصل ، اندخال، اندراج، وغیره؟ ویااینکه باید وجودبی نهایت رابعنوان یک اصل موضوعه درساختمان ریاضیات بپذیریم؟ راسل هردوکار راکرد. در چاپ اول *اصول ریاضیات* وجودبینهایت رابعنوان یک اصل بدیهی ، یامتعارف، قبول‌کرد، ودرچاپ دوم همان کتاب وجودبینهایت رابعنوان یک اصل موضوعه پذیرفت. درهردوموردمنطق گرائی بااشکال روبروست ، چه اگرریاضیات تماما" متاخربر منطق ومنتج از آن است ، باید درساختمان ریاضی درهیچ مرحله تعقل شهودی موضوع مدرک دخالتی نداشته باشد. ولی چگونه میتوان بی نهایت راصرفا" برمبنای منطق شناخت. واصولا" استفاده ، بدون دقت وتعمق کافی، از *بینهایت*درساختمان ریاضی توسط راسل و فرگه ضعفی اساسی درفلسفه ریاضی *منطق گرای* است .

حال ببینیم که نهاده اصلی فرگه ــ راسل (یعنی نظرگاه مکتب *منطق گرای*) ، که منطق رابجای *آلتی* یا *شیوه‌ای* برای ساختمان ریاضیات بعنوان *مولدو اصل* ساختمان ریاضیات میداند، وریاضیات راقابل استخراج واستنتاج ازمنطق ،چگونه در عمل بکارگرفته میشود .

این دید فلسفی ــ ریاضی درکتاب معروف راسل و وایتهد یعنی کتاب *اصول ریاضیات* بنابراظهارخودمولفان (درمقدمه‌کتاب) مبتنی است بر: ۱ــ آنالیزوهندسه واصل متعارفی کردن این دوقسمت ازریاضیات، ۲ــ منطق صوری ، که درزمان‌نگارش کتاب ، بخاطرپژوهشهای ریاضیدانهائی ماندپیانو ، وغیره، درسطحی بالا و شامل

فنون دقیق عرضهشدهبود . هدف اصلی راسل عرضه یک مجموعه اصول متعارف *اولیه* (یا بدوی) منطقی بودکه منطقیون آنهارا درقالب گزارهها واحکام *صادق* بدانندو *تمام* ریاضیات رابتوان برمبنای آنهابناکرد .

۲ـ۱ـ۱ برنامهٔ *منطق گرای*

۱ـ اصول متعارف منطق بعنوان مبناواساس برنامه : تعدادی اصول متعارف *اولیه* (بدوی یا ابتدائی) وجوددارند ، این اصول صادق هستندوریاضیات برمبنای آنها ساخته میشود . فی المثل عددبعنوان اینکه دارای معنائی منحصراست تعریف میشود : ۱ (عددیک) تحت عنوان *واحد* شناخته میشود ، ونه بعنوان عضواول یکرشته ، چنانچه پیانو فرض کرده بود (چون اولین عضومیتوانده ، ۲ ، ۳ ،وغیره فرض شود) .

۲ـ نمادهای اولیه ، گزارهها وتوابع گزارهای : همانگونه که درشیوه اصل متعارفی عمل میشود ، ساختمان ریاضی باتعدادی مفاهیم *اولیه* تعریف ناشده آغاز میشود ، اما راسل و وایتهد *معنائی* راهم برای این مفاهیم اولیه ارائه میکنند ، واین صرفا" در جهت آشناکردن خوانندهبامفاهیم استونه بعنوان تعریفآنها (زیرامفاهیم اولیه بسیط بوده وهرگونه " تعریف " منجربه دورتسلسل میشود) .

۲ـ۱ـ معانی اولیه (یامثل اولیه) : اولیهترین وابتدائی ترین مفهوم تام در کتاب (وبرنامهٔ) اصول ریاضیات مفهوم *گزاره* است . اینمفهوم ،که نظیرثوابت جبرو نقاط هندسه میباشدفقط شامل مفاهیم ثابت است .مفاهیمی چون " آفتاب درخشنده است " ، " شیرسفیداست " ، نه مفهومی مانند " x فلان است " ، چونحکم اخیر شامل یکمتغیراست . ازمتغیردررابطه بایک حوزهٔ صادق ارزشهااستفاده میشود . احکامی که شامل متغیرهاهستندتنهادرصورتی *گزاره* میشوندکه بجای همهٔ متغیرهاارزشهای مشخص گذاشته شوند ، ودرآن صورت *توابع گزارهای* نامیده میشوند . به گزارهها *ارزشهایصدق* (صدقT، کذب F)داده میشود . درواقع گزاره عبارت ازمعنائی است که طی یکحکم در جمله شمول یافته باشدمثلا " "قندشیرین است"و "sugar is sweet"هماناد وگزاره همسان هستند ، اماصورتشان متفاوت است .

۲ـ۲ـ نمادها :*گزارهها* راباعلائم p , q , r , s نشان میدهندو*توابع گزارهای* معمولا " باعلائمی مانند φx , ∂y وغیرهنمایش داده میشوند (مثلا " φx تابعی رانشان میدهدبایک متغیر x) .صدق*گزاره* راباعلامت ⊦ . می نمایانند مثلا "p . ⊦ حکم بهصدق گزارهمیکند . (اشاره میکنیم که درکتاب *اصول ریاضیات* کلیه "پرانتزها" ، " آکولادها "وغیرهراتوسط نقاط

(•)نشان‌میدهند . مثلا "$.pVq$ بجای (pVq) ; $.pVq$: برای $[(pVq)]$ ،ولی چون یک نوع علامت گزاری نامعمول است ماازهمان نظام معمول با "پرانتز" استفاده خواهیم کرد) .سلب‌راباعلامت $\sim$ نشان میدهند ، وفصل راباعلامت V وحاصل اعمال هریک از این علائم بریک گزاره ، خودیک گزاره است . پس اگر p و q گزاره باشند $\sim(p \vee q)$ هم گزاره است . استلزام در *اصول ریاضیات* باعلامت $\supset$ نشان داده میشود (مطابق علامت $\rightarrow$ درکتاب حاضر)واستلزام ازقرارذیل‌تعریف میشود : (استلزام مادی)

$$p \supset q. = . \sim p \vee q \quad Df$$

$$(p \longrightarrow q) = (\sim p \vee q) \quad Df$$

۲ـ۳ـ گزاره‌های اولیه: اصول متعارف حساب گزاره‌ها (شامل قسمت اول کتاب *اصول ریاضیات*) عبارتنداز:

I. $:p \vee p. \supset .p$

$[(p \vee p) \longrightarrow p]$

II. $:q. \supset .p \vee q$

$[q \longrightarrow (p \vee q)]$

III. $:p \vee q. \supset .q \vee p$

$[(p \vee q) \longrightarrow (q \vee p)]$

IV. $:p \vee (q \vee r). \supset .q \vee (p \vee r)$

$[(p \vee (q \vee r)) \longrightarrow (q \vee (p \vee r))]$

V. $:.q \supset r. \supset :p \vee q. \supset .p \vee r$

$[(q \longrightarrow r) \longrightarrow [(p \vee q) \longrightarrow (p \vee r)]]$

قسمت های بعدی برنامه منطق‌گرای‌شامل: حساب گزاره‌هاوحساب محمولات دراین مختصرنمی گنجد . راسل و وایتهدبااین برنامه ، که‌به هرحال‌بعنوان‌یک نهاده فلسفهٔ‌ریاضی دیگرپیروان‌چندانی ندارد ،خدمت بسزائی به‌گسترش منطق‌ریاضی کردند .

۲ـ۲ـ مبانی صورت گرای ریاضیات :

قبلا" متذکر شدیم که افکار و آراء فلسفی لایبنیتز درباره ساختمان ریاضی، و علی‌الخصوص مفهوم *گزاره‌های یکسان* او، باعث تدوین و گسترش تفکر فلسفی در ریاضیات شد و این تفکر منجر به *منطق گرائی* شد. افکار فلسفی **کانت** مبنای دو طرز تفکر در فلسفه ریاضی است: *صورت گرایی* و *شهود گرایی*. برای **کانت**نقش منطق در ریاضیات همان نقشی است که در دیگر علوم، و به عبارت دیگر در *دانستن*، دارد. از نقطه نظر **کانت** هرچند قضایا و نتایج ریاضی مبتنی براصول متعارف‌توسط‌اصول منطق بدست می‌آیند، اصول متعارف و قضایای ریاضی خود اصول منطق نیستند و اصلا" تجلی خاصی از اصول منطق نیز نمی‌توانند باشند.

هیلبرت با الهام از تفکرات فلسفی **کانت** برنامه‌ای را در ساختمان و فلسفه ریاضی تدوین کرد که به *صورت گرایی* موسوم شد. به گفته **هیلبرت** (واین نکته مخالف اصول *منطق گرایی* است) چیزی که دراستنتاج‌های منطقی و احکام مرکب منطق مفروض است از پیش در مفروضات اولیه تعقل مندرج است. یعنی ریاضی‌دان در ذهن خود، از پیش، اشیاء غیر منطقی متعینی را، که از طریق حدس فلسفی برای او آشکار است، بلاواسطه کسب می کند،واین اشیاء هستندکه اصول‌تفکرریاضی اورامی سازند. یعنی برخلاف *منطق گرایان* که ریاضیات را مبتنی بر اصول مسلم منطق قابل ساخته شدن می‌دانند، *صورت گرایان* اصول اولیه ساختمان ریاضی را در وجود اشیاء ضروری فرامنطقی بازمی شناسند. دراین نوع ریاضیات تناقض های بنیانی وجود ندارند. تناقض‌هائی که مبتنی بر مفهوم بی‌نهایت بالفعل،پایه‌های *منطق گرایی* را متزلزل میکرد. از آنجا که مفهوم بی نهایت بالفعل هیچگونه رسم ویاتحدیدی ازاشیاء متعین نیست، دربرنامهٔ صورت گرایی موردنظرنمی باشد. تفاوت بین **هیلبرت** و **براور** (بانی مکتب *شهودگرایی*) دررابطه باریاضیات *ترانسفینی* ازنوع **کانتور** است: **هیلبرت** پارافراترازریاضیات *ترانسفینی* نمی گذارد،ولی **براور**می کوشدتابه‌نحوی بیانی از بی‌نهایت را ارائه دهد. **هیلبرت** مفهوم واقعی ریاضیات محدود را از مفهوم آرمانی ریاضیات *ترانسفینی*متمایزمیسازد،ومی کوشدتابه نحوی اثباتی از سازگاری دستگاهی متشکل ازریاضیات محدود، به انضمام ریاضیات *ترانسفینی*، ارائه دهد. و برنامه **هیلبرت** مبتنی بر دو مفهوم اصلی است: ۱ـ ریاضیات شامل ترسیمی از اشیاء و ساختمانهای متعین است. ۲ـ انضمام عناصرآرمانی به یک قضیهٔ ریاضی مستلزم اثبات سازگاری دستگاه ریاضی موردنظراست، واینجاست که به تعریف کلی از

صورت گرائی میتوانیم اشاره کنیم : ریاضیات علم دستگاههای صوری است . یعنی ، و برخلاف *منطق گرائی* ، ریاضیات قدم به قدم توسط اثبات‌سازگاری دستگاههای صوری ساخته میشود ، ویک نظام کلی منطق غیرمرتبط باموضوع مدرک نیست ، وهمواره رابطه مدرک و مدرک درساختمان ریاضی ازجمله شرایط اولیه است .

برنامه **هیلبرت** ، دراثبات سازگاری نظام های صوری خلاصه میشود . البته اثبات سازگاری یک دستگاه متشکل ازگزاره‌های مختلف که خودبدین معنی است که نشان داده شودکه هیچ دو گزاره متناقض وجودندارد ، کارساده‌ای نیست . چون این کار مستلزم این است که کلیه گزاره‌هابررسی شوند ، وتنهادرموردنظام‌هائی که تعدادگزاره‌ـ ها محدودوقابل شمارش هستندامکان پذیراست . این برنامه (درذیل رئوس آنرا ذکر خواهیم کرد) برمبنای دوشیوهٔ اثبات : مستقیم وغیرمستقیم ، استوارگشته است . در بعضی ازمواردمیتوان نشان دادکه گزاره‌های متناقض الزاما" ، بخاطر رابطه بین اصول متعارف ، تعاریف واصول موضوعه ، استنتاج نمی شوند ، ودرموارد دیگربافرض "مدل" ـ های ریاضی عدم تناقض رامیتوان نشان داد . بطورخلاصه صورت *گرایان* می کوشند : ۱ـ اشیاء دستگاه صوری رادرازای اشیاءمتعین مشخص کنند ؛ ۲ـ اصول موضوعه دستگاه صوری را در رابطه بااشیاء متعینی (مفروض شده) برمبنای خود*رابطه* مشخص کنند ، ۳ـ نشان دهندکه بخاطر۱و۲ هراستنتاجی که داخل نظام صوری انجام میشودالزاما" به تناقض منجرنخواهدشد . (این مساعی ۳ شقی ۱ ، ۲ و۳) درمواردی که شمارش گزاره ها امکان پذیرنیست راه گریزی تواندبود .

صورت *گرایان* دستگاه صوری راچنانچه درذیل آمده تعریف می کنند . اشاره میکنیم که نقش اشیاء متعین درچنین دستگاههائی نقشی اساسی است ، واستفاده ازآن نه تنها درفلسفه ریاضی‌ای که صورت *گرائی‌*رامی پذیردعنوان شده ، بلکه نفس وجود و ضوابط متشکله دستگاههای صوری کاربردفراوانی درریاضیات معمولی نیز دارد .

عناصرمتشکله دستگاههای صوری عبارتنداز :

۱ـ اصطلاحات فنی یاجمله ها (Terms) :

الف ـ داده‌هایمتعین (Tokens) : عبارتنداز اشیاء متعین مختلف ، مثلا" علائم روی کاغذ ، سنگ ریزه ، وهرگونه شیئی متعین دیگر .

ب ـ اعمال (Operaions) ضوابط‌وضروب مختلف برای تشکیل اصطلاحات تازه .

ج ـ ضوابط‌تصویر (Rules of Formaion) ضوابط ساختمان اصطلاحات

تازه.. مثلا" :

$$\exists R:\{R_i\},\quad \{x_i\},\alpha:R\alpha X\longrightarrow x_1\varepsilon R_1, x_2\varepsilon R_2,\ldots$$

۲ـ گزاره های مقدماتی (Elementary Propositions)

احصاء حملیات گوناگون ،یعنی X ، Y است ، وغیره : $p_i = x_i\varepsilon R_i$

۳ـ قضایای مقدماتی (Elementary Theorems)

الف ــ اصول متعارف. یعنی‌گزاره‌های‌مقدماتی که علی الاطلاق‌وجوددارند..

ب‌ـ ضوابط شیوه‌های استنتاج (Rules of Prpcedure) $p_1,\ldots,p_n$ قضایای مقدماتی هستند ، مشروط به شرط δ_i واگر Q یک گزاره‌مقدماتی است دررابطه P_i به $p_1,p_2,\ldots p_n$ پس Q صادق است . (تدکرمیدهیم‌که کلیه اشکال قیاسی منطق یک چنین صورتی رادارند).

برای اینکه فرضا درباره یک شیئی ریاضی بتوان تصمیم گرفت ، که آیاداخل دریک دستگاه صوری هست یانه ، بایدسلسله مراحل تصمیم گیری محدودباشد . بعبارت دیگر ، محدود یا *متناهی* بودن دستگاه صوری یکی ازشزوط اصلی برنامه صورت *گرائی* است . موفقیت هیلبرت درقالب ریزی حساب مرتبه اول نقطه اوج مبانی صورت *گرای*‌بشمار می ــ آید ، ولی اثبات قضیه عدم *تمامیت*‌توسط گدل‌ضربه‌ای ینیانی به پیروان مکتب هیلبرت واردکردوسئوالهای اساسی وفلسفی رادرموردریاضیات ، وعلی‌الخصوص در مورد ریاضیات بعنوان علم دستگاههای صوری وریاضیات بعنوان یک دستگاه منطقی صرف ، عنوان نمود .. ازنقطه نظرمبانی فلسفی ریاضیات این نکته حائزاهمیت فراوان است ، چون می توانیم باقاطعیت بگوئیم که تنهاقالب ریزی ، نظام پردازی ، اصل متعارفی کردن واصول منطق رااصل قراردادن برای ساختمان ریاضی کافی نیست ، وهمواره وجود ریاضیدان و رابطه شهودی وبلاواسطه اوباحقیقت قائم ومستقل ازذهن ، در ساختمان ریاضی ضروری است .

۲ــ۳ــ مبانی شهودگرای ریاضیات :

شهودگرایی‌فلسفی ترین وبااهمیت ترین مکتب مبانی ریاضیات است . نقش تعقل وحدس فلسفی ریاضیدان نقشی است اساسی وبرخلاف دومکتب مذکوردربالا ، *شهودگرایان* بکلی امکان ساختمان ریاضی راتوسط یک " ماشین " برمبنای ضوابط منطقی وصوری ،ردمیکنند :وریاضیات رایک‌کنش فلسفی‌توسط موضوع مدرک‌میدانند ،ونتایج این کنش راکشف‌حقایق‌می‌شناسند ،حقایقی‌که‌مستقل‌ازاندیشه‌وجوددارند .واصول‌شهود*گرائی* توسط‌براوور به صورت دوکنش اصلی (بصورت بینش فلسفی) عنوان شده‌اند . اولین کنش

شهودگرای، یااولین بینش وکشف او، به کلی ریاضیات رااززبان ریاضی وازربان منطقی جدامیکند، ودرنتیجه ریاضیات *شهودگرای* دراصل یک کنش ذهنی وماسوای زبان است. واین کنش ذهنی مبتنی است برتصوری از *امتداددرزمان*که توسط قوه حافظه در ذهن محفوظ میماند (کنش‌دوم)، واین‌دوکنش، حدسی بنیانی ازریاضیات‌است که ـ ولو دربدوامرریاضیدان ازبیان آن قاصراست ـ تصوری است‌ازچیستی کل‌ریاضیات. به عبارت دیگرریاضیدان *شهودگرای*قائل باین است که ریاضیات دارای ماهیتی است قائم که درلحظات بینش فلسفی ویاآنات اشراق درذهن اومتصورمیشودوازاین طریق است که یک موضوع مدرک محدودباماهیتی قائم ونامتناهی مربوط میشود. بنابراین ریاضیات، دراصل، هم ازمحسوسات مجزااست وهم ازروابط منطقی،که مفاهیم وامکان بیان شدن مفاهیم رابهم مرتبط میکنند.

برنامه عملی ساختمان ریاضی درمبانی *شهودگرای* برای باراول توسط خودبراور عنوان شدوسپس هی تینگ یکی ازپیروانش این‌کاررادنبال کرد، واخیرا" یکی از فلاسفهٔ انگلیسی بنام دامت این برنامه راگسترش داده است. دراینجاواردجزئیات این برنامه نمی شویم، علی‌الخصوص که اخیرا" دومقاله دراین زمینه چاپ شده است (بولتن‌شماره ۱۰ انجمن ریاضی). برنامه *شهودگرای* ازیک سلسله موجودات مجرد شروع میکند، مثلا" ازاعدادطبیعی، ونیازی برای قالب ریزی یک دستگاه قیاسی صوری برای بیان آن نمی بیند. برای *شهودگرایان* اصول متعارف پئانوصرفا" بیان نتایج بدیهی " ایجاد " اعدادطبیعی است، که بزعم آنها، مبتنی برحدس فلسفی از وجود آن اعداداست. مبانی منطق *شهودگرای* قانون ارتفاع نقیضین راــکه ازقوانین سه‌گانه حاکم برمنطق‌دوارزشی،وازاصول منطق‌برنامه *منطق‌گرایان*است ــ نفی‌میکند، یعنی:

$$\sim(\forall x(p(x)\vee\sim p(x))$$

بنابراین $A \not\equiv \sim\sim A$.وبطورکلی *شهودگرایان*اثبات‌های غیرمستقیم رادرساختمان ریاضی بکارنمی برند. این نکته خودازنقطه نظرفلسفه ریاضی حائزاهمیت است. چون اگر *شهودگرایان*عملا" توانسته باشندبلاانکار برخی ازاصول منطق، ریاضیات را ساختمان دهند، عملا" نشان داده‌اندکه فرایندا‌صلی *منطق گرایان*که ریاضیات رامتاخر ومشتق ازمنطق میداند، صحیح نیست.

برتعریفی که *منطق گرایان* ازعددکرده‌اند، *شهودگرایان*اشکال اساسی می‌گیرند. چون بزعم شهودگرایان، تعریف ۲، ۳ وغیره تنهازمانی امکان داردکه مامفهوم عددرا قبلا" تحصیل‌کرده‌باشیم ونه‌اینکه توسط استقراءاعدادراتعریف‌کنیم. مثلا" *منطق‌گرایان*

عدد۲ راچنین تعریف میکنند:

$$2(P)\equiv(\ x)(\ y)[(P(x).P(y).x\neq y.(z)(P(z))\quad .z=x\quad z=y)]$$

وچون شهودگرایان تجزیه ریاضیات رابه منطق ردمیکنند، تعریف اعدادراازاین‌طریق، قولی که دلالت برماهیت‌عددبکند، نمی دانند، لکن برای شهودگرایان‌اعدادحقیقی، که مبتنی برکنش فلسفی درذهن موجودیت می یابند، درعمل ازطریق دوقانون‌بدست می آیند:

۱ــ قانون گستره‌ها Λ_M (Spread-Law) قانونی است که سلسله محدودی از اعدادطبیعی رابدوقسمت " قابل قبول " و" غیرقابل قبول " تقسیم میکند.

۲ــ قانون متمم T_M (Compl. Law) درهرموردلازم یک شیئی معرف ریاضی رابه سلسله محدودی ازاعدادمنسوب میکند.

۲ــ۴ــ نتیجه گیری:

قطعاً" نتوانسته‌ایم دراین مختصربه نتایج قاطع درباره مسائل فلسفهٔ ریاضی برسیم، ولی این خودیک‌نتیجه فلسفی است. اینکه صریحاً" نمی توانیم قبول کنیم‌که: " آیاریاضیات یک نظام منطقی است قابل گسترش برمبنای اصول وروابط منطق؟" یا " آیاریاضیات یک نظام صوری است متشکل ازاحکام ریاضی که تنهادارای صورت هستند وهیچ گونه بیانی ازحقیقت نیستندوهرآینه اثبات سازگاری قسمتی ازگزاره‌های صوری را ارائه دهیم به نحوی به موجودیت آنهااشاره کرده‌ایم؟" ویا " آیاریاضیات تمثیلی است ازحقیقت قائم بالذات؟" کدام واقعاً" صادق‌اند، خودپیچیدگی فلسفه ریاضی را می رساند. ولی لااقل توانسته‌ایم عنوان کنیم که پاسخ مابه سئوال چیستی ریاضیات پاسخ ساده‌ای نیست ومستلزم بررسی دقیقی ازاصول حاکم برتفکراتمان است.

فرگه‌اولین کسی بودکه نیازبررسی معرفت ریاضی راعنوان کردواولین کسی بود که اصول فلسفهٔ ریاضی راتدوین نمود (که پس ازاوراسل آنرابصورت یک برنامه کامل درآورد). هیلبرت و براوِر نظام‌های‌متفاوتی رابناکردندونشان دادندکه نمی‌توان یک فلسفه ریاضی راحاکم برریاضیات دانست وشایدمعانی نهائی ومبانی نهائی ریاضیات همواره بصورت سئوال باقی بماند، لکن کنش ریاضی همواره یکی ازارکان مسلم تعقل بشرباقی خواهدماندومانندهرگونه تعقلی همواره بازمان تغییرخواهدکرد، و ریاضیات شیوه‌ای دقیق، زیباومنظم، برای کشف حقائق وبیان آن دررابطه متقابل باعناصر متشکله موجودات درهرمقطع زمانی که تعقل درآن صورت بگیرد، خواهدبود.

۳ـ تاثیرنتایج ریاضی برفلسفه:

قبلا" اشاره کردیم که یکی ازمباحث فلسفه ریاضی بررسی نتایج فلسفی قضایای ریاضی است. درتاریخ فلسفه کرارا" به مواردی برمیخوریم که تفکرفلسفی تحت تاثیر مستقیم ریاضیات بوده است. مثلا" افلاطون ازپنج شکل منظم هندسه اقلیدسی در بیان چیستی ماده، وبررسی مادة الموادهستی، استفاده کرده است. دنباله 2^{n-1} مبنای بیان تمثیلی کثرت انوارمجرده درحکمت اشراقی است، وغیره. اخیرا" سه قضیه مهم در ریاضیات اثبات شده اندکه تاثیرآنهابراندیشه فلسفی میتواندگویای چندمساله اصلی درجودباشد. دراین مختصرفرصت بررسی عمیق این سه قضیه رانداریم ولی شمهٔکوتاهی ازآنهارابیان خواهیم‌کرد، بیشترازاین‌نقطه‌نظرکه به‌رابطه متقابل فلسفه وریاضی اشاره کرده باشیم.

سه قضیه مورداشاره عبارتنداز:

۱ـ اولین قضیه عدم تمامیت گدل: یک محمول وجودداردکه هیچ نظام کامل صحیح صوری برای بیان آن وجودندارد.

۲ـ قضیه چرچ: یک محمول وجودداردبطوریکه هیچ دستگاه صوری صحیحی رانمیتوانیم درنظربگیریم که شامل شیوه‌ای برای تصمیم گیری دربارهٔآن محمول ونقیض آن باشد.

۳ـ قضیه اسکولم: هیچ دستگاه سازگارجزمی صوری وجودنداردکه بتوانداعدادطبیعی رابه نحوی بیان کند.

متوجه میشریم که هرسه قضیه بنحوی به محدودیت تعقل بشراشاره میکنند. ازقضیه گدل میتوانیم نتیجه بگیریم که هیچ گاه انسان نمی تواندطبق یک برنامه مشخص(مثلا" یک نظام صوری) همواره احکام صادق وتنهااحکام صادق رابیان کند. ازقضیه‌چرچ نتیجه‌میگیریم‌که همواره مجموعه‌ای‌ازمسائل‌حل‌ناشدنی‌پیش‌روی‌بشروجوددارند، وازقضیه اسکولم نتیجه میگیریم که هیچ انسانی قادربه بیان کامل اعدادطبیعی نخواهدبود. قصدماچیست؟ واصلا" محدودیت تعقل دربشرآیاخودامری بدیهی نیست؟ یک نتیجه ساده: تعقل مطلق ممتنع است، وهمواره برای انسان مجهولات وجودخواهندداشت. البته ممکن است چنین نتیجه‌ای رابدون دردست داشتن قضایای مذکوربتوانیم عنوان کنیم، ولی قدرمسلم این است که براهین اقامه شده، قبول عدم تعقل مطلق رااستوارتر میسازدوهرچنددرعلم‌المعرفت قائل باشیم‌به‌این‌که انسان بعنوان یک جوهراندیشمند قادربه تصور لایتناهی است، ولی بااین براهین درمی یابیم که‌هیچگاه‌قادربه‌تعقل

لایتناهی نخواهدبود .

***

درپایان این پیشگفتار، بی مناسبت نمی دانیم که یکی دوسه نکتهٔ جزئی وبدیهی را درمحضرخوانندهٔ صاحبنظرعنوان کرده باشیم ، تاخدای ناکردهٔ شائبهٔ آن نرودکه ما رادربساط نکته دانان ادعای فضلی هست ، که اگرباشد ، هم عیبی نیست ،

ازجملهٔ آن نکات که دراین وجیزه رقم تذکرمی پذیرد ، یکی آن است که مضامین مندرج دراین مجموعه ــ هرچندکه درنوع خودتازه وبرای بازارکتاب ایران نوبرانه ، ونیزحائزسطحی وشانی درمنازل مباحث علمی ــ به هیچ روی به قصدآنکه در محضراستادان فن، شرف مطالعه بیابدصورت تالیف نپذیرفته وتنهابدین منظورــ وبا این امیدــ چاپ وپخش شده است تادانشجویان رشته‌های فلسفه، ومبانی وفلسفه ریاضی رامحل استفادتی باشد، که مجموعهٔ مقالات آن، پوشش نسبتا " جامع وشاملی به مباحث اصلی فلسفه ریاضی میدهد، وبرای یک ترم دریک درس فلسفهٔ ریاضی ، میتواندمورداستفاده قراربگیرد . نیز ، تااین کتاب بتواندبرای خواننده حیز استفادتی بیابد ، ازجملهٔ حداقل لوازم حصول به محتوای آن ، آشنائی باساختمانها ، وروشهای اثبات و ... سطوح بالای ریاضی است وآشنائی والفت باحداقل مقدمات منطق ریاضی . دیگرعرض این معترضه است که بدون شک اشتباهات ماازنظر صائب اصحاب نظربدورنمی تواندماند ، اینست که پیشاپیش ازقصورخودعذرمیخواهیم وهم ازذوات بزرگوارامیدبه اغماض وتساهل داریم وارائهٔ راههای صواب وسزاوار .

حسین ضیائی